On the Coefficients of the Mapping to the exterior of the Mandelbrot set
（論文要旨）

物質・生命情報学専攻

31960136　山下 琢

複素力学系において、二次多項式族 $\{z \mapsto z^2 + c\}$ ほど詳しく研究されているものはない。その connectedness locus, いわゆる Mandelbrot 集合に関しても広く研究され、1982 年には Douady と Hubbard によって連結であることが示された。しかしその局所連結性(MLC 予想)については多くの研究者によって成り立つであろうと信じられてはいるが依然として未解決の難問である。

この問題に対する一つのアプローチとして 1985 年に Jungreis は、単位円板の補集合領域から Mandelbrot 集合の補集合領域への等角写像を無限遠点において Laurent 展開したときの各係数を評価する方法を提示した。つまり各係数の評価を進めることによって、この写像が単位円板の境界上まで連続に拡張可能であることが示されれば、Carathéodory の定理より Mandelbrot 集合の境界が局所連結であることがいえるわけである。

Jungreis に続いて Bielefeld–Fisher–Haeseler(–Zagier), Ewing–Schober らにより係数の性質がより詳しく研究された。係数の評価に関していえば Jungreis とまったく異なる方法で Levin も係数の評価をしている。発表されたどの論文も Mandelbrot 集合の局所連結性を示すことに目標が置かれている。

本修士論文では Laurent 展開の係数に主眼をおいて、それらの評価をおこなう。

まず、すべての係数が 2 進有理数になることが得られているので、Jungreis によって提示されたアルゴリズムを計算機上に実装して各係数の真値を計算し、このデータに Bieberbach の面積定理を応用することによって Mandelbrot 集合の面積を評価した。くわえて box counting による評価も行うことにより、係数をもとにした数列の収束が非常に遅いことを示し、Ewing と Schober が得ていた上界の最小評価に関して彼らの推定収束区間よりも更に小さい値を得た。理論的考察の部分では、Ewing と Schober の得ていた結果を記述し直すことによって Zagier の Conjecture が解決された。

次に、力学系を定義する写像を 1 パラメータの一般多項式族 $\{z \mapsto z^d + c,\ (d \geq 2)\}$ に拡張し、その connectedness locus に同様の議論を展開する。ここではまず、d 次多項式族における一意化写像

$$\Psi_d(z) = z + \sum_{m=0}^{\infty} b_{d,m} z^{-m}$$

の係数が d 進有理数となることを得て数値実験のベースにのせ、数値実験を行うことによって理論的考察の展望をよくする。そして、二次の場合に関して Ewing と Schober の得ていたゼロ係数の条件を一般の場合に成立するよう拡張するだけでなく、三次以上の場合はより多くのゼロ係数が存在することを示し、部分的ではあるがその条件も示した。また、非ゼロ係数に関しても部分的にこれを決定した。くわえて、すべての次数のすべての係数に関して、積が整数となる d の冪を決定した。これにより、二次の場合に関する Zagier の Conjecture に肯定的証明が与えられた。

Corollary 4.31　$b_{2,m}$ を既約分数で $a/2^r$ とあらせば、任意の $m \in \mathbb{N}^+$ に対し $r \leq \mathrm{ind}_2((2m+2)!)$. 等号がみたされるのは $m=0$ または m が奇数の場合に限る。

更に、それらの filled-in Julia 集合も parameter を connectedness locus からとることによって連結であるから一意化写像が存在し、これを Laurent 展開すればその係数に関する考察が可能である。d 次の filled-in Julia 集合に対する一意化写像の各係数は parameter c の d 進有理数係数多項式として記述されることを得て、これが常にゼロとなる必要十分条件と、非ゼロの場合にその多項式の係数がすべて負であることを示した。これが本修士論文の主定理である。

Theorem 5.18　任意の次数 $d \geq 2$ において、任意の $m \in \mathbb{N}^+$ に対し

$$\beta_{d,m} \in \mathbb{Q}^-_{(d)}[c] \setminus \{0\} \qquad m \equiv -1 \pmod d,$$
$$\beta_{d,m} = 0 \qquad m \not\equiv -1 \pmod d.$$

ここで $\mathbb{Q}^-_{(d)}$ とは、負の d 進有理数の集合を意味する。

この定理の系として、正実数の parameter に対する filled-in Julia 集合が連結であれば、局所連結でもあるという結果が得られる。これは 1995 年に Levin と van Strien の得た、"次数が偶数なら実数を parameter とする filled-in Julia 集合が連結であれば、局所連結でもある" という結果を、正実数の部分だけであるが次数が奇数の範囲にまで拡張するものである。ただしこの系は、大阪市立大学の小森先生との議論において彼の助言によって得られた結果であり、本質的には彼の結果である。

そして、すべての次数のすべての係数に関して、積が整数係数多項式となる d の冪も決定した。