On the Coefficients of the Mapping to the exterior of the Mandelbrot set

名古屋大学 大学院 人間情報学研究科
物質・生命情報学専攻 博士前期課程
31960136　山下 琢

Acknowledgements

本修士論文を制作するにあたって、指導教官の篠田壽一先生、篠田先生の海外出張の間に指導していただいた松原洋先生に感謝の意を表する。

また、城西大学の西沢清子先生には学部の頃から指導していただいた上、卒業後も何かと頼りにさせていただき、途中経過を研究集会で発表する機会も与えていただいた。大阪市立大学の小森洋平先生には本論文のテーマとなる論文を紹介していただき、方向づけやアドバイスを与えていただいた。東京工芸大学の中根静男先生には Lau や Schleicher の論文を送っていただいた。防衛大学校の藤村雅代先生には基礎的な質問にまで快く答えていただいた。

以上の方々に感謝の意を表する。

Contents

1 Introduction **5**

2 Preliminaries **7**

3 Mandelbrot set **11**
3.1 Jungreis' Algorithm 12
3.2 Programming 16
3.3 Zero Coefficients 21
3.4 Some Nonzero Coefficients 21
3.5 Area of the Mandelbrot set 23

4 Generalised Mandelbrot sets **28**
4.1 Construct of Conformal mapping Ψ_d 28
4.2 Coefficient Formula 36
4.3 Zero Coefficients 37
4.4 Some Nonzero Coefficients 41

5 Filled-in Julia sets **49**
5.1 Construct of Conformal mapping $\psi_{d,c}$ 49
5.2 Coefficient Formula 55
5.3 Classification of Coefficients 56
5.4 Some Nonzero Coefficients 59

A data **64**

Figures

1 Filled-in Julia sets . . . 9
2 Mandelbrot set . . . 10
3 A boundary of the Mandelbrot set . . . 11
4 Escape loci . . . 12
5 A log graph of the absolute value of coefficients . . . 20
6 External rays . . . 20
7 Hyperbolic components . . . 24
8 Mandelbrot set drawn by LSM and DEM . . . 26
9 Various estimates of area of the Mandelbrot set . . . 27
10 Connectedness loci . . . 28
11 Escape loci . . . 30
12 External rays . . . 35
13 filled-in Julia sets for $z^2 + c$ . . . 58
14 filled-in Julia sets for $z^3 + c$ . . . 58

Tables

1 Number of times of multiplication . . . 18
2 Coefficients of Ψ . . . 19
3 Other zero coefficients . . . 40
4 Coefficients of ψ_2 . . . 53
5 Coefficients of ψ_3 . . . 54
6 Coefficients of ψ_4 . . . 54
7 Coefficients of Ψ_3 . . . 64
8 Coefficients of Ψ_4 . . . 65
9 Coefficients of Ψ_5 . . . 66
10 Coefficients of Ψ_6 . . . 67
11 Coefficients of Ψ_7 . . . 68
12 Upper bounds of area of $\mathcal{M}_d$ . . . 68

1 Introduction

複素力学系において、二次多項式族 $\{z \mapsto z^2 + c\}$ ほど詳しく研究されているものはない。しかし、その connectedness locus, いわゆる Mandelbrot 集合に関しては、連結であることは Douady-Hubbard [DH82] によって示されているが、局所連結性 (MLC 予想) については依然未解決である。

この問題に対する一つのアプローチとして Jungreis [Jun85] は、単位円板の補集合領域から Mandelbrot 集合の補集合領域への等角写像 $\Psi : \widehat{\mathbb{C}}\backslash\overline{\mathrm{D}} \to \widehat{\mathbb{C}}\backslash\mathcal{M}$, $(\mathrm{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\})$, つまり一意化写像の無限遠点における Laurent 展開

$$\Psi(z) = z + \sum_{m=0}^{\infty} b_m z^{-m}$$

の各係数 b_m を評価する方法を提示した。つまり各係数の評価を進めることによって、この写像が単位円板の境界上まで連続に拡張可能であることが示されれば、Carathéodory の定理より Mandelbrot 集合の境界が局所連結であることがいえるわけである。

Jungreis の提示を受けて、Bielefeld–Fisher–Haeseler(–Zagier) [BFH93], Ewing–Schober [ES90, ES92] らにより係数の性質がより詳しく研究された。
また、これとは独立に Levin [Lev88] も係数の評価をしている。

本修士論文では、Jungreis によって提示された方法で各係数 b_m を計算するとともにその結果を用いて Mandelbrot 集合の面積の上限を評価する。また、力学系を定義する写像を 1 パラメータの一般多項式族 $\{z \mapsto z^d + c,\ (d \geq 2)\}$ に拡張し、その connectedness locus に同様の議論を展開することによって一意化写像の各係数を特徴づける。更に、それらの filled-in Julia 集合に関しても同様の考察を行い、その一意化写像族の係数の性質を特徴づける。

本修士論文の主結果は Zagier の Conjecture を一般化した形で証明した Corollary 4.31 と、filled-in Julia 集合に関する一意化写像の係数を分類する Theorem 5.18 である。

本修士論文の構成は以下の通りである。
まず第 2 章において、本論文に必要な複素力学系の用語と定義、よく知られている結果について幾つか述べる。
第 3 章において、Jungreis の方法を用いて一意化写像を Laurent 展開したときの各係数を計算機上に実装したプログラムによって求めるとともに、その結果を用いて Mandelbrot 集合の面積の上界を評価する。また、各係数の性質を述べ、Ewing と Schober が得ていた結果を記述し直すことによって Zagier の conjecture が解決されることをみる。
第 4 章において、単位円板の補集合領域から高次多項式族の力学系における connectedness locus の補集合領域への一意化写像を構成し、数値実験によって得られたデータをもとに 3 章と同様の手法をもって各係数を評価する。ここでは二次の場合に関して Ewing と Schober の得ていたゼロ係数の条件を一般の場合に成立するよう拡張するだけでなく、三次以上の場合はより多くのゼロ係数が存在することを示し、部分的ではあるがその条件も示す。また、非ゼロ係数に関しても部分的にこれを決定する。くわえて、すべての次数のすべての

係数に関して、積が整数となる d の冪を決定し、これにより二次の場合に関する Zagier の Conjecture に肯定的証明を与えることになる。

第 5 章では、4 章までの結果を filled-in Julia 集合に応用し、各係数を評価する。d 次の filled-in Julia 集合に対する一意化写像の各係数は parameter c の d 進有理数係数多項式として記述されるが、これが常にゼロとなる必要十分条件と、非ゼロの場合にその多項式の係数がすべて負であることを示した。そして、すべての次数のすべての係数に関して、積が整数係数多項式となる d の冪も決定した。

本論文に掲載したすべてのグラフィックと大部分の数値計算はプログラムを作成することにより行ったが、5 章における ψ_d の係数表作成に関しては Risa/Asir, symbolic and algebraic computation system, Version 950831, ©FUJITSU LABORATORIES LIMITED を用いた。

2 Preliminaries

Riemann 球面を $\widehat{\mathbb{C}}$, 自然数にゼロを加えたものを $\mathbb{N}^+$ と書く。

$$\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}, \quad \mathbb{N}^+ = \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

p 進有理数、すなわち有限 p 進小数として記述可能な有理数全体の集合を $\mathbb{Q}_{(p)}$ と書く。

原点を中心とする半径 r の開円板を D_r と書く。特に $r = 1$ の場合、つまり単位円板のときは単に D と書く。

実数 α に対する二項係数を $(1+x)^\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} C_i(\alpha)\, x^i$ と記述する。

整数 n を素因数分解し $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots$ とあらわしたとき、a_i を n の p_i に関する order と呼び $\mathrm{ord}_{p_i}(n)$ であらわす。更に、素数でない q に関する order を次のように定める。すなわち、q を素因数分解して $q = q_1^{b_1} q_2^{b_2} \cdots q_r^{b_r}$ と記述されるとき、n の q に関する order は gauss 記号 $[x]$ を用いて

$$\mathrm{ord}_q(n) = \min\left\{ \left[\frac{\mathrm{ord}_{q_1}(n)}{b_1}\right], \left[\frac{\mathrm{ord}_{q_2}(n)}{b_2}\right], \cdots, \left[\frac{\mathrm{ord}_{q_r}(n)}{b_r}\right] \right\}.$$

本論文内で扱う力学系はすべて多項式によって定義される。多項式写像 f に対し、$f(\infty) = \infty$ とすることによってその定義域および値域を複素平面 $\mathbb{C}$ から Riemann 球面 $\widehat{\mathbb{C}}$ に拡張するのはごく自然なことであり、本論文においてもそのようにして扱う。∞ における力学系の挙動は $1/z$ の座標変換を適用することにより、原点における挙動を調べればよい。

以下で、力学系における基本的な用語・定義を述べる。これらの定義は [Bla84], [Mil90] などを参照している。

iteration

f を Riemann 球面 $\widehat{\mathbb{C}}$ 上の多項式写像とし、その **iteration** を

$$\begin{aligned} f^0(z) &= id, \\ f^n(z) &= \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n}(z), \\ f^{-n}(z) &= \{w \in \widehat{\mathbb{C}} : f^n(w) = z\} \end{aligned}$$

で定める。

本論文内で写像に対し、その iteration を f^n または $f^n(z)$ と記述する。冪をあらわす場合は括弧で括って $(f)^n$ または $f(z)^n$ などと記述する。

orbit

点 $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$ に対し、$z_{n+1} = f(z_n)$ として帰納的に定義される点列を z_0 の f による **forward orbit** といい $\mathcal{O}_f^+(z_0)$ であらわす。逆に、ある回数の iteration の後に z_0 となる点全体の集合を **backward orbit** といい $\mathcal{O}_f^-(z_0)$ であらわす。すなわち

$$\mathcal{O}_f^+(z_0) = \{f^i(z_0) : i \in \mathbb{N}^+\},$$
$$\mathcal{O}_f^-(z_0) = \{f^{-i}(z_0) : i \in \mathbb{N}^+\}.$$

periodic point

ある自然数 p に対して $f^p(z_0) = z_0$ となるとき、z_0 は f の **p-periodic point** または単に **periodic point** であるといい、最小の p をその **period**, 集合

$$\{z_0, f(z_0), f^2(z_0), \dots, f^{p-1}(z_0)\}$$

をその **cycle** と呼ぶ。periodic point もまた preperiodic point である。特に $p = 1$ のとき、z_0 を f の **fixed point** とも呼ぶ。

また、z_q $(q \geq 1)$ が periodic point になっている場合、z_0 を **preperiodic point** と呼ぶ。特に z_q そのものは periodic point でない場合、z_q を **strict preperiodic point** という。

critical point

$f'(z_0) = 0$ をみたす点 z_0 を f の **critical point** という。critical point z_0 の f による値 $f(z_0)$ を **critical value**, critical point の orbit を **critical orbit** と呼ぶ。

Riemann–Hurwitz の公式から d 次多項式写像の critical point は $\widehat{\mathbb{C}}$ 上に重複度も込めて $2d-2$ 個存在することがわかるが、このうちの $d-1$ 個は無限遠点 ∞ である。f の有限な critical point の集合を $\mathcal{C}_f$ であらわす。

$$\mathcal{C}_f = \{z \in \mathbb{C} : f'(z) = 0\}.$$

multiplier

p-periodic point z_0 に対して $\lambda = (f^p)'(z_0)$ をその **multiplier** (または eigenvalue) と呼ぶ。z_0 が fixed point の場合は $\lambda = f'(z_0)$ である。この multiplier によって、各 cycle, fixed point を次のように分類する。

$\lvert\lambda\rvert > 1$	のとき	**repelling,**
$\lvert\lambda\rvert = 1$	のとき	**indefferent** または **neutral,**
$0 < \lvert\lambda\rvert < 1$	のとき	**attracting,**
$\lambda = 0$	のとき	**super attracting.**

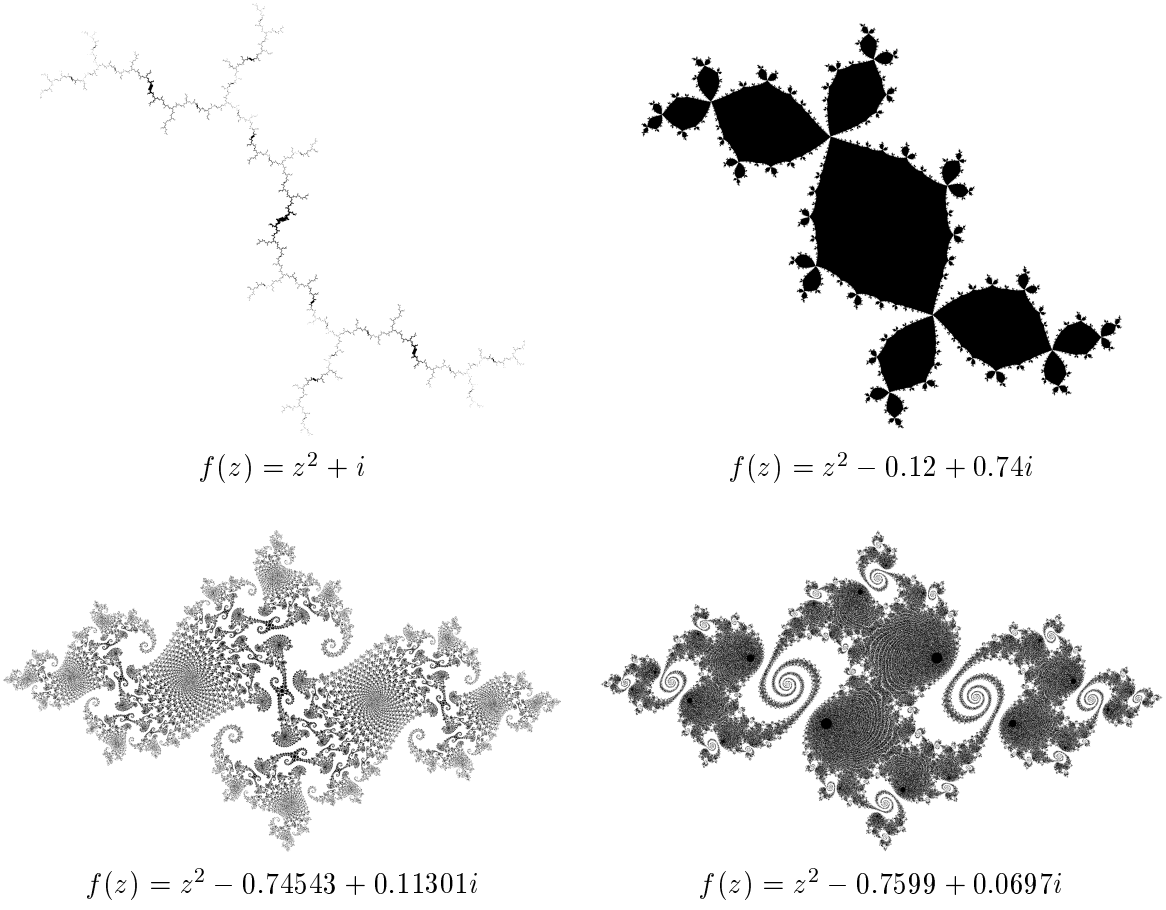
Remark. 多項式写像において、∞ は常に super attracting fixed point である。

Julia set

f による forward orbit が有界であるような点全体の集合を f の **filled-in Julia** 集合といい $\mathcal{K}_f$ または単に $\mathcal{K}$ であらわす。

$$\mathcal{K}_f = \{z \in \mathbb{C} : \mathcal{O}_f^+(z) \text{ is bounded}\}.$$

Figure 1 に filled-in Julia 集合の例を図示する。



$f(z) = z^2 + i$ $f(z) = z^2 - 0.12 + 0.74i$

$f(z) = z^2 - 0.74543 + 0.11301i$ $f(z) = z^2 - 0.7599 + 0.0697i$

Figure 1: Filled-in Julia sets

filled-in Julia 集合の境界 $\mathcal{J}_f = \partial\mathcal{K}_f$ を **Julia** 集合という。f の次数が 2 以上のときは

- $\mathcal{J}_f, \mathcal{K}_f \neq \emptyset$.
- $\mathcal{J}_f, \mathcal{K}_f$ はコンパクト集合。
- $\mathcal{J}_f, \mathcal{K}_f$ は完全集合。つまり孤立点をもたない。
- $\mathcal{J}_f, \mathcal{K}_f$ は完全不変。つまり

$$f(\mathcal{J}_f) = \mathcal{J}_f = f^{-1}(\mathcal{J}_f), \quad f(\mathcal{K}_f) = \mathcal{K}_f = f^{-1}(\mathcal{K}_f).$$

また、$\mathcal{J}_f, \mathcal{K}_f$ の連結性に関して次の関係が知られている。

Theorem 2.1 (Fatou and Julia).

$$\mathcal{C}_f \subset \mathcal{K}_f \quad \Rightarrow \quad \mathcal{J}_f, \mathcal{K}_f \text{ は連結、}$$
$$\mathcal{C}_f \not\subset \mathcal{K}_f \quad \Rightarrow \quad \mathcal{J}_f, \mathcal{K}_f \text{ は全不連結。}$$

Connectedness locus

$\mathcal{K}_f$ が連結であるような parameter 全体の集合を、写像族 f の **connectedness locus** という。特に写像族として $p_c(z) = z^2 + c$ を考えるときは **Mandelbrot 集合** と呼ばれる。これを $\mathcal{M}$ であらわすことにする。

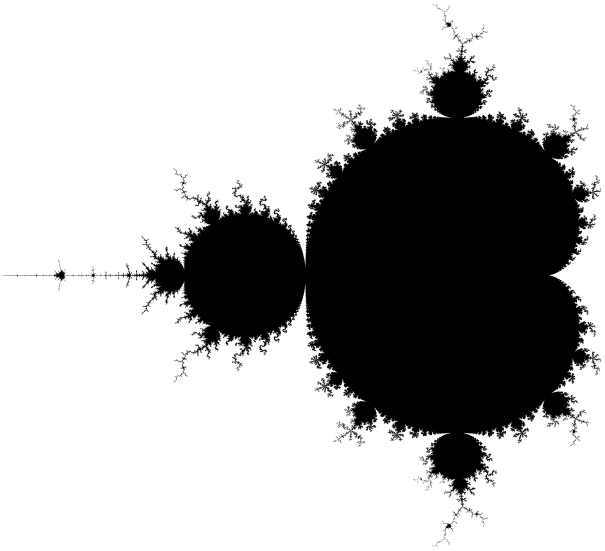


Figure 2: Mandelbrot set

Theorem 2.1 から、$\mathcal{K}_{p_c}$ が連結であるためには $\mathcal{C}_{p_c} \subset \mathcal{K}_{p_c}$ でなければならないが、$\mathcal{C}_{p_c} = \{0\}$ であることから、$\mathcal{M}$ は $\mathcal{O}^+_{p_c}(0)$ が有界であるようなすべての parameter として定義できる。

Mandelbrot 集合は $\overline{\mathrm{D}}_2$ に含まれるコンパクト集合 (Claim 4.4) で、連結であることが知られている (Theorem 3.3)。

Remark. Figure 2 の Mandelbrot 集合はその概形に過ぎない。Mandelbrot 集合は Blum と Smale [BS] によって $\mathbb{R}$ 上 undecidable であることが示されているので、その正確な図を描画する有効なアルゴリズムは存在しない。

Remark. Julia 集合に関しても Blum-Shub-Smale [BSS89] により有理関数の Julia 集合が $\mathbb{R}$ 上 decidable であるための条件が与えられており、一般に Julia 集合 (したがって filled-in Julia 集合も) の正確な図を描くことは不可能である。

3 Mandelbrot set

この章ではまず、閉単位円板の補集合領域から 1 parameter 複素二次多項式族 $p_c(z) = z^2 + c$ の connectedness locus, つまり Mandelbrot 集合の補集合領域への双正則写像 Ψ を無限遠点 ∞ において Laurent 展開したときの各係数を求める Jungreis のアルゴリズムと、それを用いて実際に行った数値計算に関して述べる。その後で各係数に関して既に得られている結果を述べ、数値計算データから Mandelbrot 集合の面積の上界を評価する。

写像 $p_c(z) = z^2 + c$ の有限な critical point は $z = 0$ のみ、つまり $\mathcal{C}_{p_c} = \{0\}$ であるから、p_c の filled-in Julia 集合が連結であることと、$z = 0$ の p_c による forward orbit $\mathcal{O}^+_{p_c}(0)$ が有界であることが同値である。

parameter space を定義域とする写像列 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ を以下のように帰納的に定義する。

Definition 3.1.

$$A_0(c) = c, \quad A_{n+1}(c) = (A_n(c))^2 + c.$$

明らかに A_n は 2^n 次 monic 多項式である (一般形に関しては Claim 4.27 を参照)。この写像を用いれば Mandelbrot 集合 $\mathcal{M}$ は以下のように定義される。

Definition 3.2 (Mandelbrot set).

$$\mathcal{M} = \{c \in \widehat{\mathbb{C}} : \lim_{n\to\infty} |A_n(c)| \nrightarrow \infty\}.$$

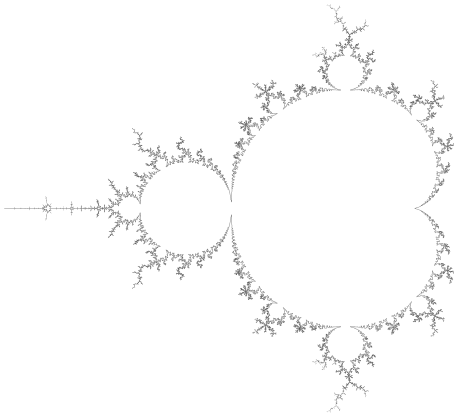


Figure 3: A boundary of the Mandelbrot set

Remark. Figure 3 に Mandelbrot 集合の境界を図示したが、この境界は極めて複雑な構造を有している。実際、Mandelbrot 集合の境界の Hausdorff 次元は 2 であることが [Shi91] によって示されている。

1982 年、Douady と Hubbard によって以下の事実が証明された。

Theorem 3.3 ([DH82] Theorem 1).

$\mathcal{M}$ は連結。

Riemann の写像定理により、単位円板 D から $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{M}$ への等角写像 (uniformizing map) が存在する。実際、Douady と Hubbard の証明は $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{M}$ から $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathrm{D}}$ への等角写像 Φ を構成することによって得られた。Φ の逆写像を Ψ とし、その無限遠点 ∞ における Laurent 展開を

$$\Psi(z) = z + \sum_{m=0}^{\infty} b_m z^{-m}$$

とおく。Jungreis の提示したアルゴリズムは、この各係数 b_m を求めるものである。

3.1 Jungreis' Algorithm

各係数 b_i を求めるための Jungreis のアルゴリズムの理論的基礎となる事実を述べる。本節における双正則写像 Ψ の構成は Jungreis の方法をなぞる。次章において多少異なる方法で一般の場合について構成するので証明等はその概要を述べるだけにとどめた。

Claim 3.4. ある $k \in \mathbb{N}^+$ が存在して $|A_k(c)| > 2$ となるなら

$$\lim_{n\to\infty} |A_n(c)| \to \infty.$$

Proof. → p.29, Claim 4.4. □

そこで、各 $k \in \mathbb{N}^+$ に対して $|A_k(c)| > 2$ となる parameter c の集合を U_k とおく。

Definition 3.5.

$$U_n = \{c \in \widehat{\mathbb{C}} : |A_n(c)| > 2\}.$$

明らかに $U_n \subset U_{n+1}$ であるから $\bigcap U_i = U_0$, また $\bigcup U_i = U_\infty = \mathcal{M}$ でもある (Claim 4.6)。Riemann 球面における U_n のようすを Figure 4 に図示した。$\mathcal{M}$ の境界付近で黒くつぶれているのは、U_n の境界同士が非常に接近しているためである。

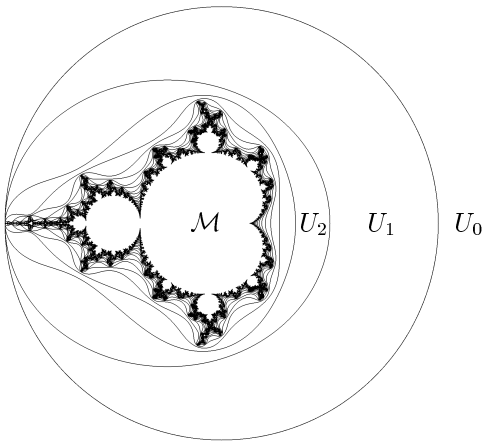


Figure 4: $U_0, U_1, U_2, \cdots$

まず、U_n において $A_n(c)$ はゼロ点を持たない (Claim 4.7) から $A_n(c)/c^{2^n}$ も正則かつ非ゼロ。したがってある正則写像 g_n で $g_n(\infty) = 0$ となるものをとって $A_n(c) = c^{2^n} e^{g_n(c)}$ と置ける。$\Phi_n(c) = ce^{g_n(c)/2^n}$ とおくことによって次が示される。

Proposition 3.6 ([Jun85] Theorem 1). 任意の $k \in \mathbb{N}^+$ に対し、次の条件をみたす $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{M}$ から $\widehat{\mathbb{C}}$ への正則写像 Φ_k が一意に存在する。

$$(\Phi_k(c))^{2^k} = A_k(c), \quad \Phi_k(c) = c + O(1).$$

Proposition 3.7 ([Jun85] Theorem 2). Φ_n を U_n に制限すれば単射となり、$D_{2^{1/2^n}}$ へ全射となる。

Proof. → p.32, Claim 4.11. □

したがって $\Phi_n|_{U_n}$ の逆写像を Ψ_n とおけば、$\Psi_n|_{D_{2^{1/2^n}}}$ も全単射である。

Definition 3.8.

$$\Psi_n = \Phi_n^{-1} : D_{2^{1/2^n}} \to U_n.$$

この写像 Ψ_n の極限が Ψ である。

Proposition 3.9 ([Jun85]). Ψ_n は $n \to \infty$ のとき $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{D}$ で Ψ に局所一様収束する。

$$\lim_{n\to\infty} \Psi_n = \Psi : \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{D} \to \widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{M}.$$

Remark. Jungreis は Proposition 3.9 の証明を ``Carathéodory の核収束定理より明らか'' としているが、$\{U_n\}$ の領域核は $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{M}$ ではなく、私には理解不可能であった。したがって、次章では本章とは異なる方法で双正則写像を構成するが、その場合でも以後の議論に支障は生じない。実際、Ψ は等角写像であるから一意化条件のもとでユニークに決定される。ここではこのまま Ψ が構成されたとして議論を進める。

こうして構成された Ψ の係数を求めることが目標であった。そのためにまず、Ψ_n が次をみたすことに注意する。

Claim 3.10.

$$A_n(\Psi_n(z)) = z^{2^n}.$$

Proof. Ψ_n の定義から明らか。 □

この性質により、各 Ψ_n の係数を求めることが可能である。すなわち、$\Psi_n(z)$ を A_n に代入して、これが z^{2^n} と等しいという方程式を解けばよい。そして次の Lemma を得ることによって Ψ の係数を求めることと、Ψ_n の係数を求めることとが結びつく。

Proposition 3.11 ([Jun85] Corollary to Theorem 4, [ES90] Lemma 1).

$$\Psi(z) = \Psi_n(z) + O\Big(\frac{1}{z^{2^{n+1}-2}}\Big).$$

つまり、無限遠点 ∞ における $\Psi_{n+1}(z)$ と $\Psi_n(z)$ の Laurent 展開は

$$z + b_0 + b_1/z + b_2/z^2 + \cdots + b_{2^{n+1}-3}/z^{2^{n+1}-3}$$

まで一致する。

Remark. Jungreis による Proposition 3.11 の証明は積分を用いた不思議な証明で、何を意味しているのか理解不可能であった。Ewing と Schober も ``We do not understand the application of the integral'' として別証を与えている。次章 p.33 Proposition 4.16 では この Proposition の拡張版を Bielefeld-Fisher-Haeseler による証明をもとにして示す。

Proposition 3.11 と Claim 3.10 から直接次を得る。

Corollary 3.12.

$$A_n\left(\Psi(z)\right) = z^{2^n} + O\left(\frac{1}{z^{2^n-1}}\right). \tag{1}$$

以上より、理論上すべての係数は計算可能であることがわかる。すなわち

$$\Psi(z) = z + \sum_{m=0}^{2^{n+1}-3} b_m z^{-m} + O\left(\frac{1}{z^{2^{n+1}-2}}\right)$$

とおけば、これを A_n に代入した結果は次式であらわされる。

$$\begin{aligned} A_n(\Psi(z)) = z^{2^n} &+ \mathbb{N}^+[b_0]z^{2^n-1} + \mathbb{N}^+[b_0, b_1]z^{2^n-2} + \cdots \\ &+ \mathbb{N}^+[b_0, \cdots, b_{2^{n+1}-3}]z^{2-2^n} + O\left(\frac{1}{z^{2^n-1}}\right). \end{aligned}$$

Corollary 3.12 より $z^{2^n-1}, z^{2^n-2}, \cdots, z^{2-2^n}$ の係数はすべてゼロでなければならない。そこでまず z^{2^n-1} の係数部分より b_0 を得る。その b_0 を z^{2^n-2} の係数部分に代入すれば b_1 を得る。以降 recursive に一元方程式を解くことによって係数 b_i が決定される。

更に、数値計算をする上で次の事実は大変重要である。

Lemma 3.13.

$$\forall i \in \mathbb{N}^+;\ b_i \in \mathbb{Q}_{(2)}.$$

Proof. → p.34, Lemma 4.17. □

Remark. この Lemma は、係数が 2 進有理数であるということだけでなく、上記の操作によって係数を求める限りでは、計算の途中で使用するすべての数が 2 進有理数であることをも意味する。

以上により Jungreis のアルゴリズムが得られる。

Jungreis' Algorithm.

$b_0, b_1, \cdots, b_i$ を求めたいとする。

1. $\widehat{\Psi}(z) = z + \sum_{m=0}^{i} b_m z^{-m}$ とおく。
2. $i \leq 2^{n+1} - 3$ をみたす整数 $n \geq 1$ をとる。
3. A_n に $\widehat{\Psi}(z)$ を代入して計算し、$z^{2^n-1}, \cdots, z^{2^n-i-1}$ の係数を代数式として求める。
4. 得られた係数の式から $b_0, b_1, \cdots, b_i$ を帰納的に数値として計算する。

Remark (1). Jungreis の提示したアルゴリズムは 1 において無限級数をとっているが、ここでは数値計算のベースにのせるために有限項で切ることにした。アルゴリズムの本質は Jungreis の提示したそれと何ら変わることはない。

Remark (2). [Yam] において 1 と 2 の順番を入れ替えて、項数を i までではなく $2^{n+1}-3$ までとると記述したが、b_i までの計算には i までとれば十分なのは明らかであるからここで切った。

Remark (3). Lemma 4.17 の証明を見ればわかる通り、最終的に解く必要がある一元方程式は一次であることが保証される。

Example. 最初の 2 項 b_0, b_1 を求める $(i = 1)$。

1. $i = 1 \leq 2^{1+1} - 3$ であるから $n = 1$ にとる。
2. $\widehat{\Psi}(z) = z + b_0 + b_1/z$ とおく。
3. $\widehat{\Psi}(z)$ を A_1 に代入して計算すれば

$$\begin{aligned} A_1(\widehat{\Psi}(z)) &= \widehat{\Psi}(z)^2 + \widehat{\Psi}(z) \\ &= z^2 + (2b_0 + 1)z + (2b_1 + b_0^2 + b_0) + (2b_0 b_1 + b_1)z^{-1} + b_1^2 z^{-2}. \end{aligned}$$

4. z^1 の係数 $2b_0 + 1 = 0$ より $b_0 = -1/2$,
   z^0 の係数 $2b_1 + b_0^2 + b_0 = 0$ より $b_1 = 1/8$ を得る。

3.2 Programming

計算の過程で使用される数値や、結果として得られる係数はすべて有理数であること (Lemma 3.13 の Remark) と、有限の手順で停止することが保証されているので、実際の計算機で真値を求めることが可能である。

実際に二種類のプログラムを作成した。使用言語はともに C++ である。

数式演算タイプ　最初に作成したのは Jungreis のアルゴリズムをほぼそのままの形で実装したもの。つまり、代数式として $A_n(\widehat{\Psi}_n(z))$ を計算し、ここで得られた各係数の代数式を順に解く方法である。

現実問題として計算過程の各係数に出現する代数式 $\mathbb{N}^+[b_i]$ の膨張が激しく、莫大なメモリが要求されて多くの係数を決定するのは困難である。

数式処理ソフトを利用した場合も同様の問題が発生し、Risa/Asir 及び Mathematica を使用したが膨れ上がる項の計算で多くの係数を求めることはできなかった。数式処理ソフトの場合は一般の計算に対応すべく設計されているので、特定の計算専用に設計しチューニングされたプログラムと比較して非常に多くの時間やメモリを要求される。

数値計算タイプ　$\Psi(z)$ を A_n に代入したときの z^{-m} の係数を $b_m^{(n)}$ であらわす。A_n の帰納的定義と、$m \leq -2$ に対して $b_m = 0$ であることから $b_m^{(n)}$ は有限級数で

$$b_m^{(n)} = b_m + \sum_{i=-2^{n-1}}^{m+2^{n-1}} b_i^{(n-1)} b_{m-i}^{(n-1)}$$

と記述可能であることが容易にわかる。

したがって、関数の再帰呼び出しを用いればメモリ使用量を抑えて多くの係数を決定することが可能である。[ES92] でもほぼ同様の記述をした上で更に backward recursion formula を得て、それをベースに数値計算を行っている。

プログラムの概形として、以下に C++ の例を記述する。

```
// coef 型は多倍長有理数を実現するクラス
coef  *b;

void main()
{
  // 求める係数の個数を入力
  int  number;
  cin >> number;

  // 求めた係数を保持しておくメモリを確保
  b = new coef[number];

  for (int m = 0; m <= number; m++) {

    // 必要な反復回数を求める。
    int  iter = int(log(m + 3.) / log(2.) + 1);
```

```
    // iter 回反復後に b_m の現れる項の次数
    int  c = -pow(2., iter) + m + 1;

    // iter 回反復後の z^c の係数は 2^iter b_m + Z[b_0, ..., b_{m-1}].
    // 上式第二項 Z[b_0, ..., b_{m-1}] を求める
    coef  tmp = PsiRec(iter, m);

    // b_m を求める。b_m = -(Z[b_0, ..., b_{m-1}]) / 2^iter.
    b[m] = -tmp / pow(2., iter);
  }

  // 求めた係数を表示する
  for (int i = 0; i <= number; i++)
    cout << "b[" << i << "] = " << b[i] << endl;
}


coef PsiRec(int iter, int m)
{
  // b_m^(iter) = b_m + sum_{i=-2^(iter-1)}^{m+2^(iter+1)} b_i^(iter-1) b_{m-i}^(iter-1).

  // 上式第一項を代入
  coef  ret = b[n];

  if (k != 0)
    for (int i = -int(pow(2., iter - 1));
              i <= m + int(pow(2., m - 1)); i++)
      ret += PsiRec(iter - 1, i) * PsiRec(iter - 1, m - i);

  return ret;
}
```

Remark. これはフローチャートのかわりとして記述したもので、この通りのプログラムを作成しても反復回数を求める部分で誤差が生じたり、実際に係数を求めるために莫大な計算時間を要求されるはずである。

使用するすべての有理数は $\mathbb{Q}_{(2)}$ の元であるから、分母は 2 の対数を保持することによって乗算を加算に変換した。したがって有理数を保持するためには、分子を保持する多倍長整数と分母を保持する整数の組を用意すればよい。

実際のコーディングに際して、計算過程の値を保持しておくことなどによって巨大分数同士の乗算を殆ど実行させないようにすることが可能である。乗算回数を減らすことは数値計算における重要なファクターである。$b_0, \cdots, b_{124}$ を既知として b_{125} を求めるためには理論上 44294924087 回の乗算を必要とするが、アルゴリズムに工夫を加えることによって 769 回の乗算で計算できる。b_{2045} は分母・分子ともに 1200 桁を超える巨大有理数になるから計算時間短縮に対する貢献は非常に大きい。

実際に最終的に実装したプログラムは 3000 行程度のものになった。これを用いて b_{125} までを求めた場合、その内部においてどれだけの乗算が行われているか計測した。Table 1 にそれを示す。「必要乗算回数」とは Jungreis のアルゴリズムによって計算した場合に必要な有理数を含む乗算の回数である。「総乗算回数」とは実装したプログラムにおいて実際に有理数乗算のルーチンに入った回数であり、このうち 0 または 1 での乗算はもちろん行う必要は無く、4 桁以下同士の乗算は整数乗算に変換可能である (実装した OS における整数型の範囲が 10^{10} 程度であったため)。実際に多倍長整数を含む有理数乗算を行った回数は 14873 回であった。このプログラムにおいて離散フーリエ変換は用いていない。

Table 1: b_{125} まで計算した場合の乗算回数

必要乗算回数		680082727019
総乗算回数		46869
乗算をする必要がない	0 での乗算	12648
	1 での乗算	6865
乗算を行う必要がある	4 桁以下 × 4 桁以下	12483
	多倍長有理数同士の乗算	14873

このプログラムにより $b_0, b_1, \cdots, b_{2045}$ を実際に求めた (計算時間はおよそ 104 時間)。b_{101} までを Table 2 に示す。分母は 2 の冪であるから、その指数を記した。分子がゼロの場合は ∞ としてある。

Remark. Jungreis [Jun85] は最初の 4095 個 (つまり b_{4093} まで)、Bielefeld-Fisher-Haeseler [BFH93] は 8000, Ewing-Schober [ES92] は 240000 個を求めている。Ewing と Schober は並列コンピュータ上で倍精度実数を用いて計算し、CPU time 30 時間ほどでメモリ不足で停止したとある。

これにより Ψ は

$$\Psi(z) = z - \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^3 z} - \frac{1}{2^2 z^2} + \frac{15}{2^7 z^3} - \frac{47}{2^{10} z^5} - \frac{1}{2^4 z^6} + \frac{987}{2^{15} z^7} - \frac{3673}{2^{18} z^9} + \frac{1}{2^5 z^{10}} - \frac{61029}{2^{22} z^{11}} - \frac{689455}{2^{25} z^{13}} - \frac{21}{2^9 z^{14}} + \cdots .$$

また、各係数の (絶対値の) 対数を Figure 5 にプロットした。Ewing と Schober はすべての係数について $|b_m| < 1/m$ が成り立つであろうと予想している。この予想が正しければ級数の絶対収束を意味し、すなわち $\mathcal{M}$ は局所連結であることになるが、それ以前に Bielefeld-Fisher-Haeseler によって Ψ が ∂D まで連続に拡張可能であるなら、そこで Hölder 連続ではないことが示されている。したがって、Ewing と Schober の Conjecture は誤りである。しかし、現在までの数値計算において $|b_m| \geq 1/m$ なる係数は見い出されていない。

Table 2: Coefficients of Ψ

index	denominator	numerator	denominator	index
0	1	-1	1749621609166100653959196203116873770019996374684408079183	200	101
1	3	1	69735	27	100
2	2	-1	-52127741631115657413845689932600077024119369334221371 51	197	99
3	7	15	-13025534542844563	65	98
4	∞	0	67823999405623090967314414048496520065634397250392286 63	193	97
5	10	-47	0	∞	96
6	4	-1	10837673416661126920948535308640721933067069795959626 3	190	95
7	15	987	340704551647237	57	94
8	∞	0	41037772037398067328786781258241431431548294536827 75	183	93
9	18	-3673	-104325	25	92
10	5	1	-10123048859724059008555817700687208850911398678038 67	180	91
11	22	-61029	-10288277991389	57	90
12	∞	0	-39962992497283768847948857706495779839599313949708 3	176	89
13	25	-689455	0	∞	88
14	9	-21	-34621014215164544226485408784333928197522903635 9	173	87
15	31	59250963	-36843615694781	55	86
16	∞	0	85952476363941565325640668698931114138560593101 7	168	85
17	34	-164712949	10439	23	84
18	11	39	12325347197791945711576332419237705246727881039	165	83
19	38	-2402805839	-7113832088153	51	82
20	6	-1	63969045783182437827758271586442615966989815 73	161	81
21	41	-4850812329	0	∞	80
22	11	29	-89843340803035192865962660639880874352310141 1	158	79
23	46	-18151141041	8140709464361	50	78
24	∞	0	-47620770710531366814404397919706291185698 61	152	77
25	49	3534139462275	-6677	21	76
26	17	-1039	-30913869993126943643577210328675851542187 9	149	75
27	53	-22045971176589	-1447722066907	48	74
28	8	-1	78305803829791781470449330875047041905661	145	73
29	56	-750527255965871	0	∞	72
30	19	-4579	-76719641981016204674000173551774438736 7	142	71
31	63	54146872254247683	10217713227	42	70
32	∞	0	-41746547502477429702683322826724363010 9	137	69
33	66	-155379776183158669	-55	16	68
34	20	2851	-12587804195470930508423250884414875171	134	67
35	70	-6051993294029466699	21920911673	42	66
36	10	-1	-52673129990690233204689072671878375 01	130	65
37	73	7704579806709870203	0	∞	64
38	24	92051	10841161044524620706090826650642383 07	127	63
39	78	-403307733528668035403	-11847286243	40	62
40	∞	0	-14184344322073996871142269959059 67	119	61
41	81	1650116480759617184697	1	12	60
42	26	-229813	-37568787096163705029346186095151 7	116	59
43	85	36124726440442241978477	-27868893	36	58
44	12	-41	-86759054137349910856105327834 93	112	57
45	88	-225851495844149964787753	0	∞	56
46	26	564373	-69861727802891580938828034400 9	109	55
47	94	-35761228458796476847725737	-30057875	35	54
48	∞	0	74815618913797220433481657203	104	53
49	97	36237687675055136179470582 3	33	13	52
50	33	-29407003	-65103984835782382741511944 27	101	51

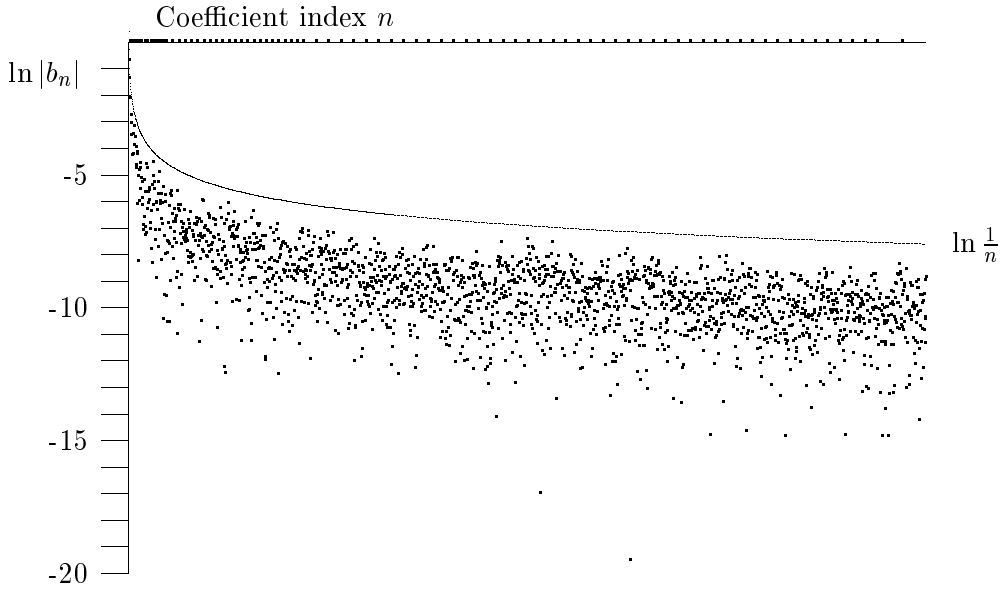


Figure 5: A log graph of the absolute value
of the first 2045 coefficients of the Laurent series for $\Psi(z)$

また、求めた係数の値を使用して各々の一意化写像 Ψ_d を近似し、半径 1.0001, 1.05, 1.1, 1.15, 1.2, 1.25, 1.3, 1.35, 1.4, 1.45, 1.5 の円とそれに直交する直線

$$\left\{ re^{i\theta} : 1.0001 \leq r \leq 1.5, \theta = \frac{2\pi i}{240} (i = 0, \cdots, 239) \right\}$$

の像を描画して Figure 6 にまとめた。

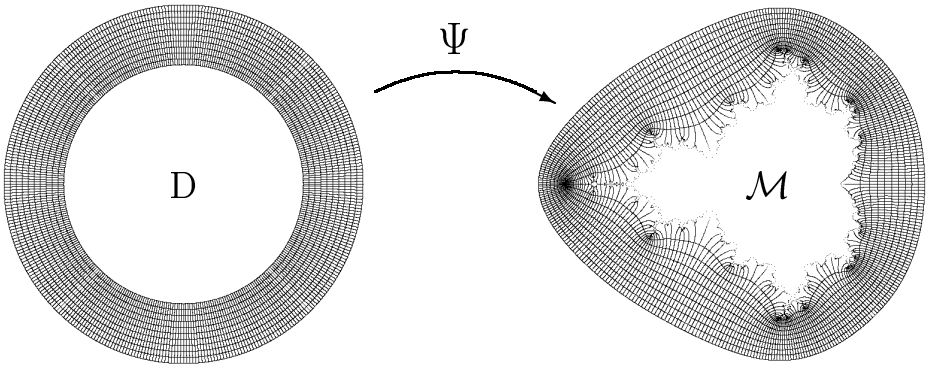


Figure 6: External rays

Zagier's conjectures

Bielefeld-Fisher-Haeseler から 1000 以上の係数データを提示された Zagier はこれを見て幾つかの法則を推測した。[BFH93] では ``Zagier's observations'' とあるが、ここでは conjecture として扱う*。また、記法を本論文のものに書き直した。

Conjecture 3.14 (Zagier's conjecture 1). 任意の整数 $\nu \leq 1$ と任意の整数 $K \leq 2^{\nu+1} - 5$ に対して $m = K2^{\nu}$ とおけば $b_m = 0$. 逆に $b_m = 0$ であればその *index* m は上のように記述可能。

前半部分、すなわち ``$K \leq 2^{\nu+1} - 5 \Longrightarrow b_{K2^{\nu}} = 0$'' に関しては [BFH93] (preprint MPI/88-46) において証明を与えているが、Levin [Lev88] (Received April 1986) によって既に証明されていた (Theorem 3.17)。
後半部分、すなわちその逆に関しては未解決である (Conjecture 3.18)。

Conjecture 3.15 (Zagier's conjecture 2). 任意の整数 $\nu \geq 1$ に対し、$2^{\nu+1} - 5$ より大きい最初の二つの奇整数を $K_1 < K_2$ とし、$m_1 = K_1 2^{\nu}, m_2 = K_2 2^{\nu}$ とおく。このとき $b_{m_1} = 4b_{m_2}$.

この conjecture に関しては Corollary 3.20 において肯定的に証明される。

Conjecture 3.16 (Zagier's conjecture 3). b_m を既約分数で $a/2^r$ とあらせば、任意の $m \in \mathbb{N}^+$ に対し $r \leq \mathrm{ord}_2((2m+2)!)$. 特に m が奇数の場合には等号がみたされる。

前半部分のよりゆるい条件に関しては Ewing と Schober の結果が存在する (Lemma 3.21)。この conjecture の完全な形の証明は Corollary 4.31 において与える。

3.3 Zero Coefficients

Theorem 3.17 ([Lev88] Theorem 1). 任意の整数 $\nu \geq 2$ と $K \leq 2^{\nu+1} - 5$ に対し $m = K2^{\nu}$ とおく。このとき

$$b_m = 0.$$

Conjecture 3.18 (Bielefeld-Fisher-Haeseler-Zagier [BFH93]). $b_m = 0$ となるのは、その index m が任意の整数 $\nu \geq 2$ と任意の整数 $K \leq 2^{\nu+1} - 5$ で $m = K2^{\nu}$ と書ける場合に限る。

Ewing-Schober [ES92] において、$m < 24000$ の範囲では Conjecture 3.18 に反例は存在しないことが報告されている。

3.4 Some Nonzero Coefficients

Ewing と Schober が得た非ゼロ係数の式をまとめる。

*このことについて Zagier に直接質問してみたが回答は得られなかった。

Theorem 3.19 ([ES90] Theorem 4, [ES92] Theorem 2). 正整数 ν と K をとって $m = K2^\nu$ とおく。

- $\nu \geq 1,\ K = 2^{\nu+1} - 3, 2^{\nu+1} - 1$ のとき

$$b_m = -\frac{(2^{\nu+1} - 4)!}{2^K 2^\nu! (2^\nu - 2)!}.$$

- $\nu \geq 1,\ K = 2^{\nu+1} + 1$ のとき

$$b_m = \frac{3(2^\nu - 6)(2^{\nu+1} - 2)!}{2^{K+2}(2^{\nu+1} - 5)(2^\nu - 1)!(2^\nu + 1)!}.$$

- $\nu \geq 2,\ K = 2^{\nu+1} + 3$ のとき

$$\begin{aligned} b_m = -\frac{(2^{\nu+1} - 1)!}{3 \cdot 2^{K+2} 2^\nu!} \Bigg(& \frac{8}{(2^{\nu+1} - 3)(2^{\nu+1} - 7)(2^\nu - 4)!} \\ & - \frac{12(2^{2\nu+1} - 2^\nu - 8)}{(2^{\nu+1} - 1)(2^{\nu+1} - 3)(2^\nu - 2)!} \\ & + \frac{2^\nu (2^{3\nu+2} + 17 \cdot 2^{2\nu} + 2^{\nu+1} + 4)}{(2^\nu + 2)!} \Bigg). \end{aligned}$$

Ewing と Schober は $m = (2k+1)2^\nu$ とおいて k の値によって各係数の式を求めた。しかし、その式は combination の和としてあらわされ、上記のように整理して書き下すことはなされなかった。ここで、上記のように書き下すことによって Zagier の 2 番目の conjecture(Conjecture 3.15) が正しいことを容易にみることができる。すなわち

Corollary 3.20 (Zagier's conjecture [BFH93]).
任意の整数 $\nu \geq 1$ に対し、$2^{\nu+1} - 5$ より大きい最初の二つの奇整数を $K_1 < K_2$ とし、$m_1 = K_1 2^\nu, m_2 = K_2 2^\nu$ とおく。このとき次の関係が成り立つ。

$$b_{m_1} = 4 b_{m_2}.$$

また、Conjecture 3.16 の前半部分に関して条件を弱めた形での肯定的解決を Ewing-Schober は得ている。

Lemma 3.21 ([ES92] Theorem 1). 任意の $m \in \mathbb{N}^+$ に対し $2^{2m+1} b_m \in \mathbb{Z}$.

Remark. 一般に $\mathrm{ord}_2((2m+2)!) \leq 2m+1$ であることに注意。したがって Zagier の Conjecture の前半部分すらも解決されたわけではない。

Corollary 4.31 において、この Lemma の内容を含む Conjecture 3.16 を完全な形で肯定的に証明する。

3.5 Area of the Mandelbrot set

Ewing と Schober [ES92] により、Ψ の係数を用いて Mandelbrot 集合の面積の上限が評価された。以後、Mandelbrot 集合の面積を $\mathrm{Area}(\mathcal{M})$ と書く。

Bieberbach の面積定理より $\mathrm{Area}(\mathcal{M})$ は Ψ の係数 b_m を用いて以下のように書ける。

$$\mathrm{Area}(\mathcal{M}) = \pi \left(1 - \sum_{m=1}^{\infty} m|b_m|^2 \right).$$

この式の N までの部分和を

$$S_N = \pi \left(1 - \sum_{m=1}^{N} m|b_m|^2 \right)$$

とおけば、$S_1 \geq S_2 \geq \cdots$ は $\mathrm{Area}(\mathcal{M})$ の上界の列になる。Figure 9 に S_{2045} までをプロットした。Ewing と Schober は [ES92] において Ψ の係数を実数値で b_{240000} まで求め、$S_{240000} = 1.7274\cdots$ を得た。更に、数列 $\{S_N\}$ に Richardson の補外法を適用し、その極限値 $\lim_{N\to\infty} S_N = \mathrm{Area}(\mathcal{M})$ が $[1.66, 1.71]$ 内に存在すると予測した。

逆に、$\mathrm{Area}(\mathcal{M})$ の下界を求めるために $\mathcal{M}$ の内部を分割する。

Definition 3.22 ([Mil92]).
写像 f は、すべての *critical orbit* が有界で、その *orbit* が *attracting cycle* に収束する場合に ***hyperbolic*** と呼ばれる。p_c が *hyperbolic* であるとき *parameter* c を ***hyperbolic point*** と呼ぶ。*hyperbolic points* 全体の集合を ***hyperbolic connectedness locus*** と呼び、$\mathcal{H}$ と記述する。

写像 f が attracting cycle をもてば、critical orbit はこれに収束するから、hyperbolic point とは attracting cycle をもつような写像 p_c の parameter c といえる。
明らかに $\mathcal{H} \subset \mathcal{M}$ である。$\mathcal{H}$ は開集合であるが、これが $\mathcal{M}$ の内部と一致する、つまり ``$\mathcal{M}$ の内部のどの点をとっても、それを parameter とする力学系 $z^2 + c$ は attracting cycle をもつ'' という conjecture がある。Mandelbrot 集合が局所連結であることが示されれば、この conjecture も正しいことがわかっている。

$\mathcal{H}$ を更に分割する。

Definition 3.23.
critical orbit が n 周期の *attracting cycle* に収束するような *parameter* c の集合を $\mathcal{H}_n$ とおく。

$$\mathcal{H}_n = \left\{ c \in \mathbb{C} : \exists k \exists n \; p_c^{k+n}(0) = p_c^k, \; |(p_c^n)'(p_c^k(0))| < 1 \right\}.$$

$\mathcal{H}_n$ は一つの component であるとは限らない。$\mathcal{H}_n$ の components の個数を $\#(\mathcal{H}_n)$ であらわせば、一般に次の式が成り立つ ([Bra89, PR86] などを参照)。

$$\#(\mathcal{H}_n) \leq 2^{n-1} - \sum_{n|k} \#(\mathcal{H}_k).$$

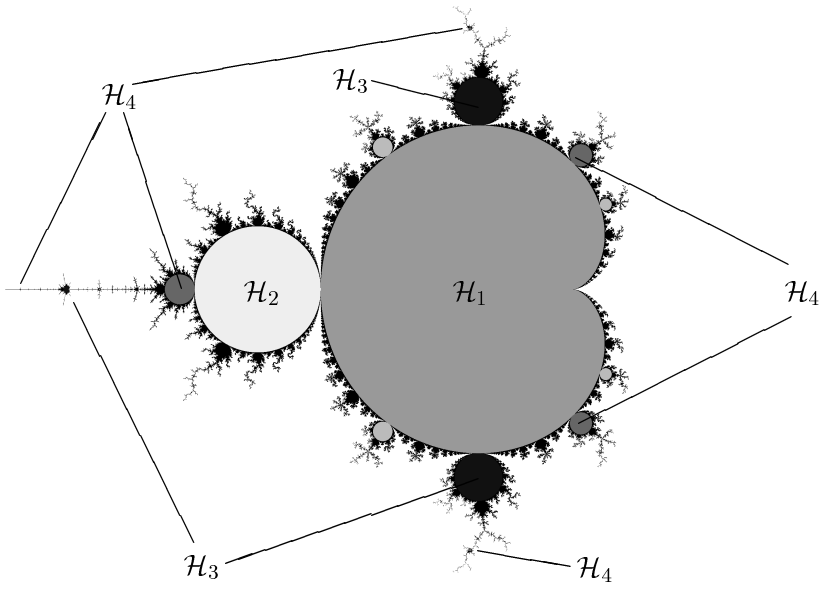


Figure 7: $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3, \mathcal{H}_4$.

各 component は hyperbolic component と呼ばれ、それらはすべて単位円板と同相であることがわかっている ([DH82])。

$\mathcal{H}_1$ は attracting fixed point をもつ parameter 全体である。fixed point をもつという条件より $p_c(z) = z^2 + c = z$ をみたし、attracting であるという条件からその multiplier $|\lambda| = |2z|$ が 1 以下でなければならない。したがって $\mathcal{H}_1$ は

$$\mathcal{H}_1 = \left\{ c \in \widehat{\mathbb{C}} : |1 \pm \sqrt{1-4c}| < 1 \right\}.$$

これは $\mathcal{M}$ の main body である cardioid の部分に相当し、その面積は $3\pi/8$ である。

同様に $\mathcal{H}_2$ は単一の component

$$\mathcal{H}_2 = \left\{ c \in \widehat{\mathbb{C}} : |c+1| < 1/4 \right\}$$

からなり、その面積は $\pi/16$ である。

Area($\mathcal{M}$) の大雑把な下界の評価として $\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2 = 7\pi/16$ を採用する。

Ewing と Schober は [ES92] において box counting によって Area($\mathcal{M}$) の下界を $1.52(\pm 0.1)$ より大きくはないと予測し、その結論として S_N の収束が非常に遅いか、Mandelbrot 集合 (特にその境界) の描画が不正確であるかのどちらかであるとしている。

ここで用いられた描画法は恐らく (数値実験の結果と比較すれば) Level Set Method と呼ばれる最も簡単なものと思われる。この方法は Claim 3.4 の事実をそのまま実装するもので、ある正整数 N を十分大きくとり、parameter plane 上の各点 c_0 に対し

$$\begin{aligned} A_N(c_0) \in \mathrm{D}_2 \quad &\Rightarrow \quad c_0 \in \mathcal{M}, \\ A_N(c_0) \notin \mathrm{D}_2 \quad &\Rightarrow \quad c_0 \notin \mathcal{M}. \end{aligned}$$

とする描画法である。等ポテンシャル曲線を描画するのによく用いられる。

Mandelbrot 集合の境界をうまく描画するものとしては、Distance Estimator Method と呼ばれる描画法がある。これは Milnor による $c \notin \mathcal{M}$ と $\mathcal{M}$ との距離に関する以下の Lemma に基礎を置く描画法である。

Lemma 3.24 ([Mil89] Lemma 5.6).
$c \notin \mathcal{M}$ の $\mathcal{M}$ からの距離を $Dist(c)$ とおけば、以下の式が成り立つ。

$$Dist(c) \leq \frac{2 \sinh G(c)}{|G'(c)|}.$$

ここで G はポテンシャル関数で $G(c) = \log |\Phi(c)|$.

Proof. $w(c) = 1/\Phi(c)$ とおけば、w は $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{M}$ を単位円板に写す双正則写像である。このとき $G(c) = -\log |w(c)|$.

$\mathcal{M}$ に含まれない点 c_0 を固定し、$w_0 = w(c_0)$ とおく。w_0 を原点に写す Möbius 変換を F とおく。

$$F(w) = \frac{w - w_0}{1 - w\overline{w_0}}.$$

その微分係数は

$$F'(w_0) = \frac{1}{1 - w_0\overline{w_0}} > 0.$$

$\mathcal{M}$ から c_0 への距離を $\mathrm{Dist}(c_0)$ とおくと、合成写像 $F \circ w$ は c_0 を中心とする半径 $\mathrm{Dist}(c_0)$ の円板を $F \circ w(c_0) = 0$ として単位円板内に写す。したがって、Schwarz の Lemma より、その微分係数の絶対値は

$$F'(w(c_0))w'(c_0) < \frac{1}{\mathrm{Dist}(c_0)}.$$

ゆえに

$$\mathrm{Dist}(c_0) < \frac{1 - w_0\overline{w_0}}{|w'(c_0)|}.$$

$|c_0| = \exp(-G(c_0))$ と $|w'(c_0)| = |\exp(-G(c_0))|\,|G'(c_0)|$ を代入すれば

$$\begin{aligned}\mathrm{Dist}(c_0) &< \frac{1 - \exp(-G(c_0))^2}{|\exp(-G(c_0))|\,|G'(c_0)|} \\ &= \frac{\exp(G(c_0)) - \exp(-G(c_0))}{|G'(c_0)|} \\ &= \frac{2\sinh(G(c_0))}{|G'(c_0)|}.\end{aligned}$$

c_0 は $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{M}$ に含まれていればよいから求める式を得る。 □

G の値が非常に小さければ $\sinh(G)$ を G で近似してよい。$z_0 = 0$, $z_{k+1} = z_k^2 + c$ で反復したときに、z_n が十分大きくなれば $G(c)$ は $\log|z_n|/2^{n-1}$ で近似される。同様に、$z'_0 = 0$, $z'_{k+1} = 2z_k z'_k + 1$ で反復することにより

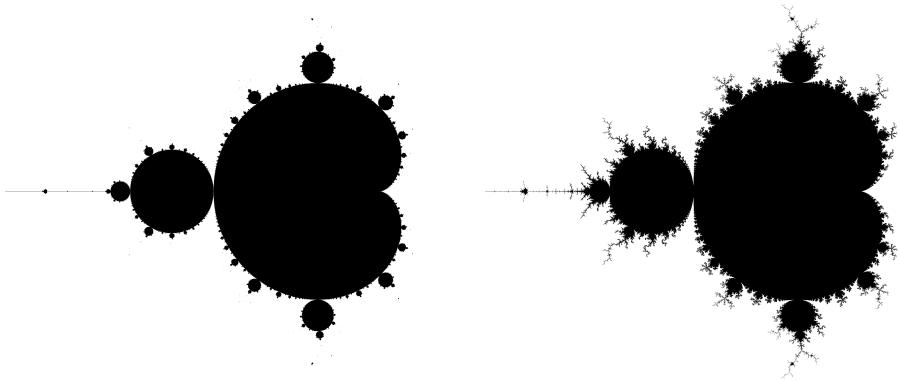
$$\frac{G(c)}{|G'(c)|} \approx \left|\frac{z_n}{z'_n}\right| \log|z_n|$$

を得る。

これを用いて Distance Estimator Method では Level Set Method と同様に $A_N(c_0)$ を計算し、$A_N(c_0) \notin \mathrm{D}_2$ と判定された場合に c_0 と $\mathcal{M}$ との距離 $\mathrm{Dist}(c_0)$ を次式によって推定する。

$$\mathrm{Dist}(c_0) = 2\frac{|A_N(c_0)|}{|A'_N(c_0)|} \log|A_N(c_0)|.$$

この値が非常に (例えば、サンプル点同士の間隔の $1/2$ よりも) 小さければ $c_0 \in \mathcal{M}$ として描画する。Figure 8 に Level Set Method と Distance Estimator Method によって描画した Mandelbrot 集合を示す。



Level Set Method　　Distance Estimator Method

Figure 8: Mandelbrot set

Distance Estimator Method による box counting で推定した $\mathrm{Area}(\mathcal{M})$ の上界は 1.653701 であった。

Remark. Fractal 図形の面積を box counting で推定することには危険が伴う。例えば、単位正方形内のペアノ曲線の面積を box counting で推定した場合、covering のとりかたによって 0 から 1 の間の様々な値をとる。

Distance Estimator Method の box counting による $\mathrm{Area}(\mathcal{M})$ の推定値は、その描画法から $\mathcal{M}$ を含むから、$\mathrm{Area}(\mathcal{M})$ の上界を与えるものである。したがって Ewing と Schober の推定した収束区間 $[1.66, 1.71]$ は誤りで、S_N の収束は非常に遅いことがわかる。更に彼らの下界評価も (Level Set Method によるものならば) Remark にある理由によってその主張どおり $\mathrm{Area}(\mathcal{M})$ の下界を与えるとは言えない。

box counting による下界の確かな評価としては、$\mathcal{H}_1, \cdots \mathcal{H}_{16}$ の内部の面積の和を計算した結果、1.500423 が得られた。

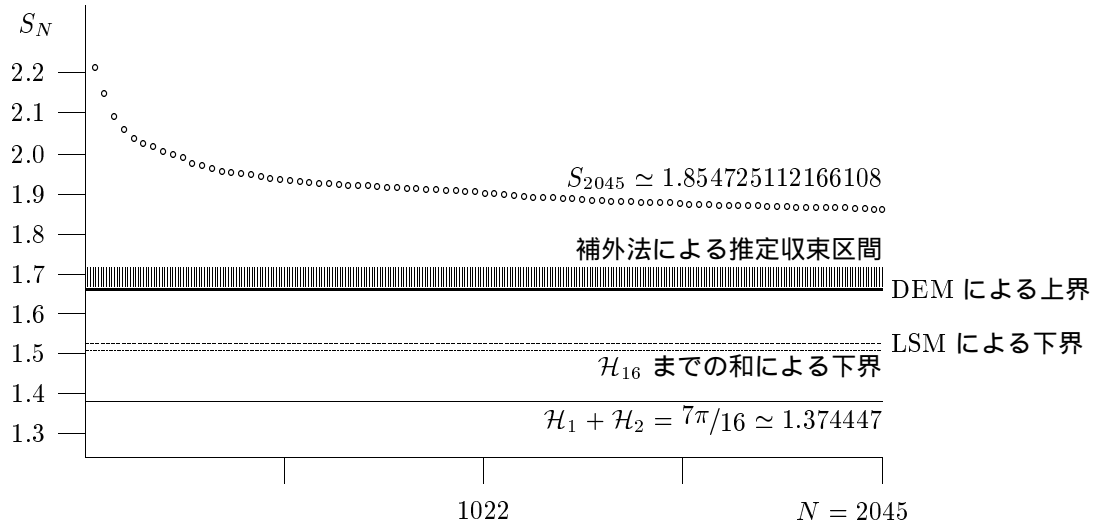


Figure 9: Various estimates of area of the Mandelbrot set

以上の上下界評価を Figure 9 にまとめた。

Remark. Mandelbrot 集合および Julia 集合を描画するためのアルゴリズムについては [Pei88, Fis88] などを参照した。

4 Generalised Mandelbrot sets

本章では、力学系を決定する多項式族を $p_{d,c}(z) = z^d + c$ $(d \geq 2)$ に一般化して、前章の議論を拡張する。定義および定理は特に断らない限り任意の $d \geq 2$ に対しての主張である。

4.1 Construct of Conformal mapping Ψ_d

写像 $p_{d,c}$ の有限な critical point は $z = 0$ のみ、つまり $\mathcal{C}_{p_{d,c}} = \{0\}$ であるから $p_{d,c}$ の filled-in Julia 集合が連結であることと、$z = 0$ の $p_{d,c}$ による forward orbit $\mathcal{O}^+_{p_{d,c}}(0)$ が有界であることが同値である。

parameter space を定義域とする写像列 $\{A_{d,n}\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ を以下のように帰納的に定義する。

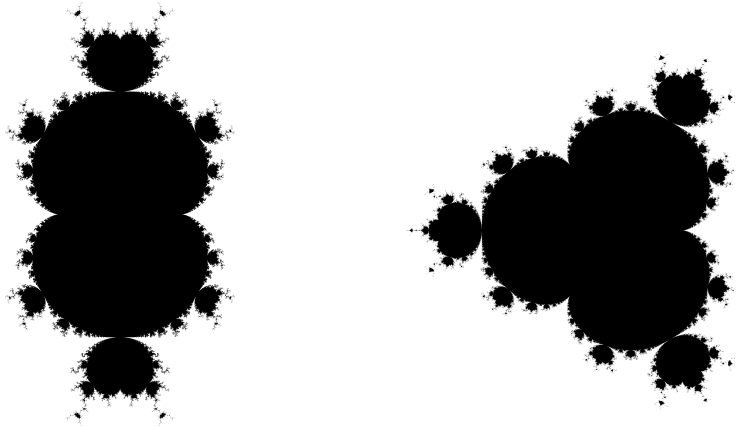
Definition 4.1.

$$A_{d,0}(c) = c, \qquad A_{d,n+1}(c) = (A_{d,n}(c))^d + c.$$

明らかに $A_{d,n}$ は d^n 次 monic 多項式である (一般形に関しては Claim 4.27 を参照)。この写像を用いれば $p_{d,c}$ の connectedness locus (Multibrot set とも呼ばれる) は以下のように定義される。

Definition 4.2 (Connectedness locus).

$$\mathcal{M}_d = \{c \in \widehat{\mathbb{C}} : \lim_{n\to\infty} |A_{d,n}(c)| \nrightarrow \infty\}$$



$\mathcal{M}_3$ $\mathcal{M}_4$

Figure 10: Connectedness loci

Connectedness locus の例として Figure 10 に力学系が 3 次の場合 $(\mathcal{M}_3)$ と 4 次の場合 $(\mathcal{M}_4)$ とを図示した。一般に $\{z \mapsto z^d + c\}$ の力学系から生じる connectedness locus が原点を中心とした $2\pi/d - 1$ の回転対称性をもつことは容易に示される。

Theorem 4.3.

$\mathcal{M}_d$ は連結。

Proof. Douady と Hubbard が $\mathcal{M}$ の連結性を証明するために構成した $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{M}$ から $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathrm{D}}$ への等角写像 Φ の一般化として $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{M}_d$ から $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathrm{D}}$ への等角写像 Φ_d を構成できる。

Claim 4.4. ある整数 $k \geq 0$ が存在して $|A_{d,k}(c)| > 2^{1/(d-1)}$ となるなら

$$\lim_{n\to\infty} |A_{d,n}(c)| \to \infty.$$

Proof. 条件を満たす最小の整数を k_0 とする。このとき

$$\begin{aligned}
\frac{|A_{d,k_0+1}(c)|}{|A_{d,k_0}(c)|} &= \frac{|A_{d,k_0}(c)^d + c|}{|A_{d,k_0}(c)|} \\
&= \left| A_{d,k_0}(c)^{d-1} + \frac{c}{A_{d,k_0}(c)} \right| \\
&\geq |A_{d,k_0}(c)^{d-1}| - \frac{|c|}{|A_{d,k_0}(c)|} \\
&\geq |A_{d,k_0}(c)|^{d-1} - 1.
\end{aligned}$$

最後の等号は $k_0 = 0$ の場合に限って成立する。どちらにしても実数 $\delta_{d,k_0} > 1$ をとって

$$|A_{d,k_0+1}(c)| = \delta_{d,k_0} |A_{d,k_0}(c)|$$

と記述可能である。同様に

$$|A_{d,k_0+2}(c)| = \delta_{d,k_0+1} |A_{d,k_0+1}(c)|, \qquad (\delta_{d,k_0+1} > 1),$$

であるが両者を比較すれば

$$\begin{aligned}
\delta_{d,k_0+1} &= \frac{|A_{d,k_0+2}(c)|}{|A_{d,k_0+1}(c)|} \\
&\geq |A_{d,k_0+1}(c)^{d-1}| - \frac{|c|}{|A_{d,k_0+1}(c)|} \\
&> \delta_{d,k_0} |A_{d,k_0}(c)| - 1 \\
&> \delta_{d,k_0} (|A_{d,k_0}(c)| - 1).
\end{aligned}$$

したがって $1 < \delta_{d,k_0} < \delta_{d,k_0+1} < \delta_{d,k_0+2} < \cdots$ である。

k_0 より大きい整数 n に対し

$$|A_{d,n}(c)| > 2^{1/(d-1)} \prod_{i=k_0}^{n-1} \delta_{d,i}$$

であるから

$$\lim_{n\to\infty} |A_{d,n}(c)| \to \infty.$$

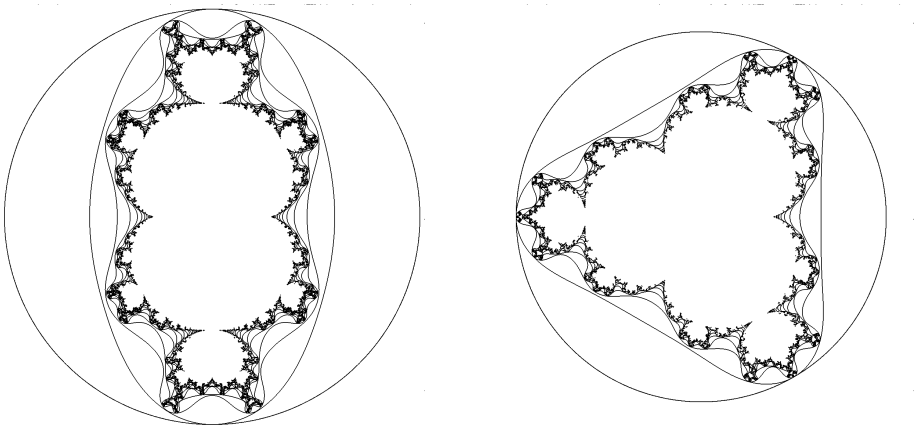
□

したがって、ある整数 $k \geq 0$ に対して $|A_{d,k}(c)| > 2^{1/(d-1)}$ となれば $c \notin \mathcal{M}_d$ である。そこで各 $k \geq 0$ に対して $|A_{d,k}(c)| > 2^{1/(d-1)}$ となる parameter c 全体の集合を $U_{d,k}$ とおく。

Definition 4.5.

$$U_{d,n} = \left\{ c \in \widehat{\mathbb{C}} : |A_{d,n}(c)| > 2^{1/(d-1)} \right\}.$$

各 $U_{d,k}$ は代数的不等式で記述できる集合であることに注意。また、定義から明らかに $U_{d,k} \subset U_{d,k+1}$ を満たす。Figure 11 に $d = 3, 4$ の場合を図示した。



$U_{3,n}$ $U_{4,n}$

Figure 11: Escape loci

Claim 4.6.

$$\widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{M}_d = \bigcup_{i=0}^{\infty} U_{d,i}.$$

Proof.

(⇒) $c \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{M}_d$ ならば $\mathcal{M}_d$ の定義より $\lim_{n\to\infty} |A_{d,n}(c)| \to \infty$.

$|c| > 2^{1/(d-1)}$ であれば $c \in U_{d,0}$.

$|c| \leq 2^{1/(d-1)}$ であれば、ある整数 $k > 0$ が存在して $|A_{d,k}(c)| > 2^{1/(d-1)}$ であるから $c \in U_{d,k}$.

(⇐) ある整数 $k \geq 0$ に対し、$c \in U_{d,k}$ であれば $|A_{d,k}(c)| > 2^{1/(d-1)}$.
したがって Claim 4.4 より $\lim_{n\to\infty} |A_{d,n}(c)| \to \infty$.

ゆえに $c \notin \mathcal{M}_d$ であるから $c \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{M}_d$.

□

Claim 4.7. ある整数 $k \geq 0$ に対し $A_{d,k}(c) = 0$ となれば $c \in \mathcal{M}_d$.

Proof. $A_{d,n}$ の定義より

$$A_{d,k}(c) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p_{d,c}^k(0) = 0.$$

これは 0 が $p_{d,c}$ の k-periodic point であることを意味するから $\lim_{n\to\infty} A_{d,n}(c) \nrightarrow \infty$. ゆえに $c \in \mathcal{M}_d$. □

Claim 4.7 より、$A_{d,n}(c)$ は $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{M}_d$ においてゼロ点を持たない。そこで $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{M}_d$ を定義域とする写像列 $\{T_{d,n}\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ を次のように定義することができる。

Definition 4.8.

$$T_{d,0}(c) = c, \qquad T_{d,n}(c) = \left(\frac{A_{d,n}(c)}{A_{d,n-1}(c)^d}\right)^{1/d^n}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

更にこれを用いて写像列 $\{\Phi_{d,n}\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ を以下のように定義する。

Definition 4.9.

$$\Phi_{d,n}(c) = \prod_{i=0}^{n} T_{d,i}(c).$$

写像 $\Phi_{d,n}$ は次の二つをみたすように構成された。

Claim 4.10.

$$\begin{aligned} &1. \quad \Phi_{d,n}(c)^{d^n} = A_{d,n}(c), \\ &2. \quad \Phi_{d,n}(c) \quad = c + O(1). \end{aligned}$$

Proof.

(1)

$$\begin{aligned} \Phi_{d,n}(c)^{d^n} &= \left(T_{d,0}(c) \cdot T_{d,1}(c) \cdots T_{d,n}(c)\right)^{d^n} \\ &= c^{d^n} \left(\frac{A_{d,1}(c)}{A_{d,0}(c)^d}\right)^{d^{n-1}} \left(\frac{A_{d,2}(c)}{A_{d,1}(c)^d}\right)^{d^{n-2}} \cdots \left(\frac{A_{d,n}(c)}{A_{d,n-1}(c)^d}\right) \\ &= A_{d,n}(c). \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \Phi_{d,n}(c) &= \left(A_{d,n}(c)\right)^{1/d^n} \\ &= c + O(1). \end{aligned}$$

□

Claim 4.11. $\Phi_{d,n}$ を $U_{d,n}$ に制限すれば単射となり、$\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{D}_{2^{1/d^n(d-1)}}$ へ全射となる。

$$\Phi_{d,n}|_{U_{d,n}} : U_{d,n} \to \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{D}_{2^{1/d^n(d-1)}}.$$

Proof.

(one-to-one)

任意の $c \in U_{d,n}$ に対し $|\Phi_{d,n}(c)|^{d^n} = |A_{d,n}(c)| > 2^{1/(d-1)}$ であるから $|\Phi_{d,n}(c)| > 2^{1/d^n(d-1)}$. ゆえに $\Phi_{d,n}(U_{d,n}) \subset \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathrm{D}}_{2^{1/d^n(d-1)}}$.

$U_{d,n}$ の境界上の点に収束する $U_{d,n}$ 内の点列 $\{c_i\}$ をとる。このとき

$$|A_{d,n}(c_1)|,\ |A_{d,n}(c_2)|,\ \cdots$$

は $2^{1/(d-1)}$ に収束するから $\Phi_{d,n}(c_1), \Phi_{d,n}(c_2), \cdots$ は $2^{1/d^n(d-1)}$ に収束する。$\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathrm{D}}_{2^{1/d^n(d-1)}}$ 内に極限点を持たないということは $\Phi_{d,n}$ が $U_{d,n}$ において proper 写像であることを意味し、Claim 4.10 の 2 より $\Phi_{d,n}(c) \sim c$ であるからその degree は 1. ゆえに $\Phi_{d,n}$ は $U_{d,n}$ において単射である。

(onto)

任意の $z \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathrm{D}}_{2^{1/d^n(d-1)}}$ に対し $\Phi_{d,n}(c) = z$ となる $c \in U_{d,n}$ が存在することを示す。

$w = z^{d^n}$ とおいて $z_1, z_2, \cdots, z_{d^n}$ を w の d^n 乗根とする。

$\Phi_{d,n}$ は $U_{d,n}$ で単射であるから、$\Phi'_{d,n}$ は $U_{d,n}$ で非ゼロ。したがって

$$(A_{d,n}(c))' = d^n \left(\Phi_{d,n}\right)^{d^n-1} (\Phi_{d,n})'$$

も $U_{d,n}$ で非ゼロであるから w は $U_{d,n}$ 内に d^n 個の相異なる $A_{d,n}$ による逆像をもつ。これらを $c_1, c_2, \cdots, c_{d^n}$ とすればもちろん $A_{d,n}(c_i) = w,\ (i = 1, 2, \cdots, d^n)$ を満たし、各 $\Phi_{d,n}(c_i)$ は w の d^n 乗根 z_j のどれかと等しい。

$\Phi_{d,n}$ は単射であるから、ある i に対し $\Phi_{d,n}(c_i) = z$.

□

Claim 4.12.

$$T_{d,n}(c) = 1 + O\left(\frac{1}{c^{d^n-1}}\right), \quad n = 1, 2, \cdots.$$

Claim 4.13.

$$\Phi_{d,n+1}(c) = \Phi_{d,n}(c) + O\left(\frac{1}{c^{d^{n+1}-2}}\right).$$

Proof.

$$\begin{aligned}
\Phi_{d,n+1}(c) &= \prod_{i=0}^{n+1} T_{d,i}(c) \\
&= \Phi_{d,n}(c) \cdot T_{d,n+1}(c) \\
&= \Phi_{d,n}(c) \left(1 + O\left(\frac{1}{c^{d^{n+1}-1}}\right)\right) \\
&= \Phi_{d,n}(c) + O\left(\frac{1}{c^{d^{n+1}-2}}\right).
\end{aligned}$$

□

つまり、無限遠点 ∞ における $\Phi_{d,n+1}$ と $\Phi_{d,n}$ の Laurent 展開は

$$c + a_0 + \frac{a_1}{c} + \frac{a_2}{c^2} + \cdots + \frac{a_{d^{n+1}-3}}{c^{d^{n+1}-3}}$$

まで一致する。

$T_{d,n}$ の定義域は $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{M}_d$ であったから n が十分大きければ $|A_{d,n-1}(c)| \to \infty$. したがって、極限写像が存在して一様収束する。これを Φ_d とおく。

Definition 4.14.

$$\Phi_d(c) = \prod_{i=0}^{\infty} T_{d,i}(c).$$

明らかに写像 Φ_d は $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{M}_d$ から $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathrm{D}}$ への双正則写像である。したがって、$\widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{M}_d$ は $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathrm{D}}$ と同相、つまり $\mathcal{M}_d$ が連結であることが示された。 Q.E.D. Theorem 4.3 □

我々が求めたいのは Φ_d の逆写像 $\Psi_d = \Phi_d^{-1} : \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathrm{D}} \to \widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{M}_d$ である。Ψ_d を無限遠点で Laurent 展開したときの z^{-m} の係数を $b_{d,m}$ であらわす。

$$\Psi_d(z) = z + \sum_{m=0}^{\infty} b_{d,m} z^{-m}.$$

Claim 4.15.

$$\Phi_{d,n}(\Psi_d(z)) = z + O\left(\frac{1}{z^{d^{n+1}-2}}\right).$$

Proof. Claim 4.13 より $\Phi_d(c) = \Phi_{d,n}(c) + O(1/c^{d^{n+1}-2})$ であり、これと $\Phi_d(\Psi_d(z)) = z$ を比較すれば明らか。 □

Claim 4.10 の 1 と Claim 4.15 より、次の関係を得る。

Proposition 4.16.

$$A_{d,n}(\Psi_d(z)) = z^{d^n} + O\left(\frac{1}{z^{d^{n+1}-d^n-1}}\right).$$

Proof.

$$\begin{aligned} A_{d,n}(\Psi_d(z)) &= \Phi_{d,n}(\Psi_d(z))^{d^n} \\ &= \left(z + O\left(\frac{1}{z^{d^{n+1}-2}}\right)\right)^{d^n} \\ &= z^{d^n} + d^n z^{d^n-1} O\left(\frac{1}{z^{d^{n+1}-2}}\right) + \cdots \\ &= z^{d^n} + O\left(\frac{1}{z^{d^{n+1}-d^n-1}}\right). \end{aligned}$$

□

したがって、前章で記した Jungreis のアルゴリズムをほとんどそのままの形で高次元の場合にも適用することが可能である。

力学系が二次の場合は Lemma 3.13 によって各係数の分母は 2 の冪であったから数値計算によって真値を求めることが可能であった。一般に d 次の場合にも各係数の分母は d の冪であらわすことが可能であることが言える。

Lemma 4.17. 任意の $m \in \mathbb{N}^+$ に対し $b_{d,m} \in \mathbb{Q}_{(d)}$.

Proof. いま $b_{d,0}, b_{d,1}, \cdots, b_{d,j-1}$ を既知とする。このとき、$\Psi_d(z)$ を $1/z^j$ の項までで切ったものを $\widehat{\Psi_d}(z)$ とおく。

$$\widehat{\Psi_d}(z) = z + \sum_{i=0}^{j} b_{d,i} z^{-i}.$$

$j \leq d^{n+1} - 3$ をみたす n をとり、$A_{d,n}$ に $\widehat{\Psi_d}(z)$ を代入すれば

$$\begin{aligned} A_{d,n}(\widehat{\Psi_d}(z)) = z^{d^n} &+ (d^n b_{d,0} + \mathbb{N}^+) z^{d^n - 1} \\ &+ \sum_{i=1}^{j} \left(d^n b_{d,i} + \mathbb{N}^+[b_0, \cdots, b_{d,i-1}]\right) z^{d^n - i - 1} + O\left(z^{d^n - j - 2}\right) \end{aligned}$$

となることが容易に確かめられる。summation のすべての係数は Proposition 4.16 よりゼロであるから

$$b_{d,j} = -\frac{\mathbb{N}^+[b_{d,0}, b_{d,1}, \cdots, b_{d,j-1}]}{d^n}$$

と書ける。$b_{d,0} = -\mathbb{N}^+/d^n$ であることから帰納的にすべての係数 $b_{d,m} \in \mathbb{Q}_{(d)}$ を得る。 □

したがって、一般の場合においても数値計算によって真値を求めることが可能。実際に C++ を用いて数値演算タイプのプログラムを作成し、$b_{3,726}$, $b_{4,495}$, $b_{5,622}$, $b_{6,412}$ $b_{7,206}$ まで真値を求めた。$b_{3,199}$, $b_{4,200}$, $b_{5,267}$, $b_{6,299}$, $b_{7,203}$ までを Table 7-11 にそれぞれまとめた。

求めた係数からそれぞれの connectedness locus の面積の上界を評価すると Table 12 のようになる。ただし、二次の場合と同様に上界列の収束は非常に遅いと考えられ、データ数の少なさから各 connectedness locus の面積はこの値よりかなり小さいことが予想される。

また、求めた係数の値を使用して各々の一意化写像 Ψ_d を近似し、半径 1.0001, 1.05, 1.1, 1.15, 1.2, 1.25, 1.3, 1.35, 1.4, 1.45, 1.5 の円とそれに直交する直線

$$\left\{ re^{i\theta} : 1.0001 \leq r \leq 1.5, \theta = \frac{2\pi i}{240} (i = 0, \cdots, 239) \right\}$$

の像を描画して Figure 12 にまとめた。

本章の残りで、写像 Ψ_d の無限遠点 ∞ における Laurent 展開

$$\Psi_d(z) = z + \sum_{m=0}^{\infty} b_{d,m} z^{-m}$$

の係数について理論的考察を行う。

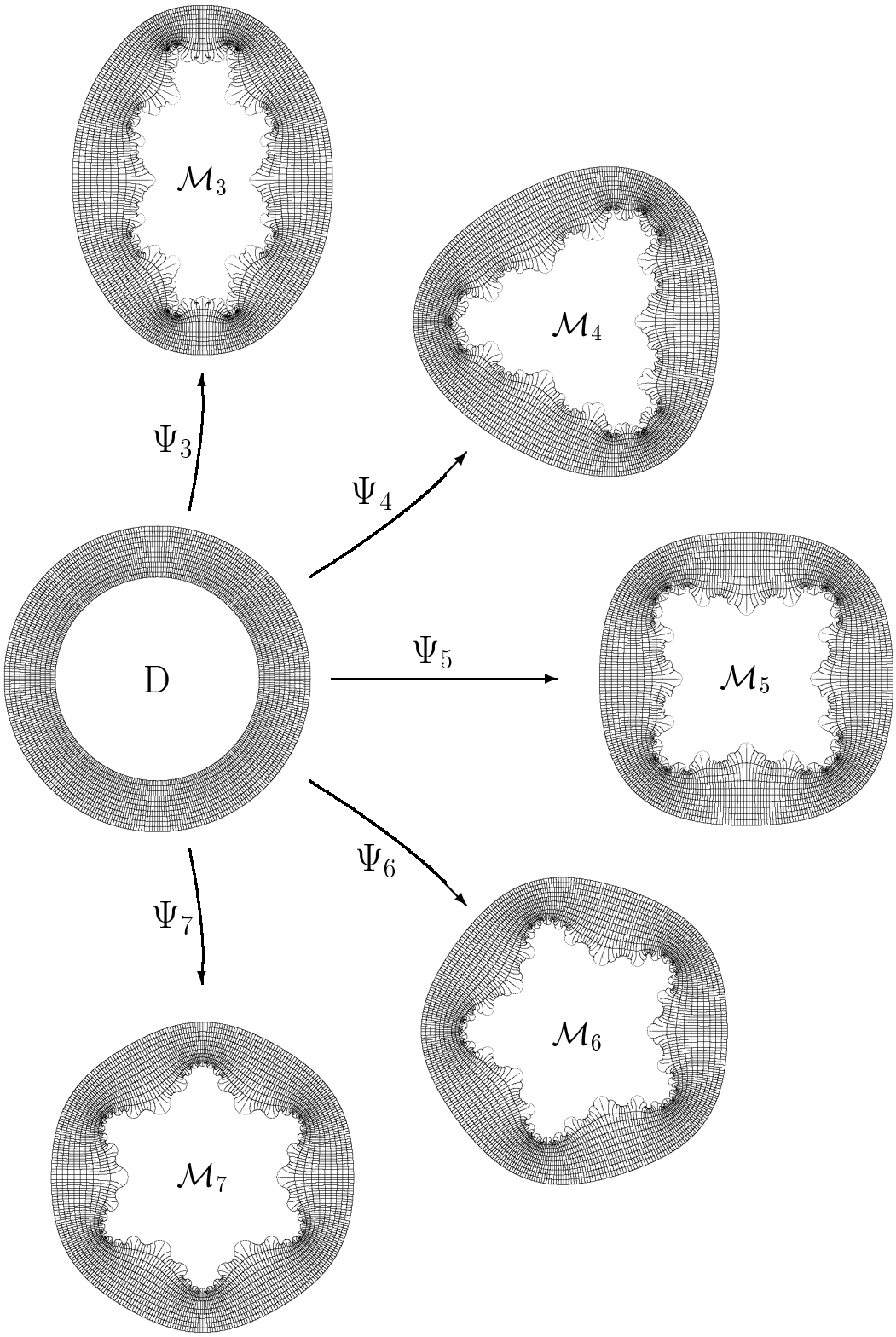


Figure 12: External rays

4.2 Coefficient Formula

本節では $\Psi_d(z)$ の各係数を理論的に考察するために有用な係数の公式を挙げる。これらは [ES90] および [ES92] において Ewing と Schober が示したものの一般化である。

Lemma 4.18. $1 \leq m \leq d^{n+1} - 3$, R 十分大であるとする。このとき

$$-mb_{d,m} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=R} A_{d,n}(w)^{m/d^n} dw. \tag{2}$$

Proof. $z = \Phi_d(w)$ とおけば $w = \Psi_d(z)$ であるから $dw = \Psi'_d(z)dz$. したがって留数定理より

$$\begin{aligned} -mb_{d,m} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} z^m \Psi'_d(z) dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=R} \Phi_d(w)^m dw \end{aligned}$$

$m \leq d^{n+1} - 3$ をみたしているから Claim 4.13 によって $\Phi_d(w)^m$ の留数と $\Phi_{d,n}(w)^m$ の留数とは等しい。したがって $\Phi_d(w)^m$ は $\Phi_{d,n}(w)^m$ と交換可能であるから

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=R} \Phi_{d,n}(w)^m dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=R} A_{d,n}(w)^{m/d^n} dw. \end{aligned}$$

□

Remark. $A_{d,n}(w)^{m/d^n}$ の無限遠点での Laurent 展開の $1/w$ の係数から Ψ_d の係数を求めることができることに注意。これは係数の理論的評価をするうえで非常に重要な意味をもつ。

Lemma 4.18 をより利用し易い表記にしておく。

Theorem 4.19. $1 \leq m \leq d^{n+1} - 3$ をみたす n と $1 \leq N \leq n$ に対し、$-mb_{d,m}$ は次式を *Laurent* 展開したときの $1/w$ の係数である。

$$\begin{aligned} \sum_{j_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{j_N=0}^{\infty} & C_{j_1}\left(m/d^{n+1}\right) \cdots C_{j_N}\left(m/d^{n-N+1} - d^{N-1}j_1 - \cdots - dj_{N-1}\right) \\ & \times w^{j_1+\cdots+j_N} A_{d,n-N}(w)^{m/d^{n-N} - d^N j_1 - \cdots - dj_N}. \end{aligned} \tag{3}$$

Proof. Lemma 4.18 より、$A_{d,n}(w)^{m/d^n}$ が (3) と等しくなることがいえればよい。

$|w|$ が十分に大きければ $A_{d,n}(w)$ の帰納的定義から

$$\begin{aligned}
A_{d,n}(w)^{m/d^n} &= \left(A_{d,n-1}(w)^d + w\right)^{m/d^n} \\
&= A_{d,n-1}(w)^{m/d^{n-1}} \left(1 + \frac{w}{A_{d,n-1}(w)^d}\right)^{m/d^n} \\
&= \sum_{j_1=0}^{\infty} C_{j_1}\left(m/d^n\right) w^{j_1} A_{d,n-1}(w)^{m/d^{n-1}-dj_1} \\
&= \sum_{j_1=0}^{\infty} C_{j_1}\left(m/d^n\right) w^{j_1} A_{d,n-2}(w)^{m/d^{n-2}-d^2 j_1} \left(1 + \frac{w}{A_{d,n-2}(w)^d}\right)^{m/d^{n-1}-dj_1} \\
&= \sum_{j_1=0}^{\infty}\sum_{j_2=0}^{\infty} C_{j_1}\left(m/d^n\right) C_{j_2}\left(m/d^{n-1} - dj_1\right) w^{j_1+j_2} A_{d,n-2}(w)^{m/d^{n-2}-d^2 j_1-dj_2} \\
&\vdots \\
&= \sum_{j_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{j_N=0}^{\infty} C_{j_1}\left(m/d^n\right)\cdots C_{j_N}\left(m/d^{n-N+1} - d^{N-1}j_1 - \cdots - dj_{N-1}\right) \\
&\qquad\qquad \times w^{j_1+\cdots+j_N} A_{d,n-N}(w)^{m/d^{n-N}-d^N j_1-\cdots-dj_N}.
\end{aligned}$$

□

Corollary 4.20. $1 \le m \le d^{n+1} - 3$ のとき

$$-mb_{d,m} = \sum C_{j_1}\left(m/d^n\right)\cdots C_{j_n}\left(m/d - d^{n-1}j_1 - \cdots - dj_{n-1}\right).$$

ここで、和は $(d^n-1)j_1 + \cdots + (d-1)j_n = m+1$ をみたす全ての非負整数 $j_1, \cdots, j_n$ にわたってとる。

Proof. (3) において $N = n$ とすれば、$A_{d,0}(w) = w$ であることから明らか。 □

4.3 Zero Coefficients

次数 d が 3 以上の場合 Ψ_d には自明なゼロ係数が存在する。

Theorem 4.21. 任意の次数 $d \ge 3$ において、任意の自然数 $m \not\equiv -1 \pmod{d-1}$ に対し

$$b_{d,m} = 0.$$

Proof. Corollary 4.20 において、すべての係数 $b_{d,m}$ は 次式をみたす非負整数 $j_1, \cdots, j_n$ によって記述された。

$$(d^n-1)j_1 + \cdots + (d-1)j_n = m+1.$$

この組み合わせが存在しなければ係数 $b_{d,m}$ はゼロとなる。

左辺は $d-1$ で整除されるから右辺 $m+1$ も同様。したがって、$m \equiv -1 \pmod{d-1}$ でなければ係数 $b_{d,m}$ はゼロ。 □

Remark. これを``自明な''ゼロ係数と呼んだのは connectedness locus $\mathcal{M}_d$ の回転対称性から直接 (容易に) 得られるという意味である。実際、Theorem 4.21 は [Yam] において $\mathcal{M}_d$ の回転対称性から示したが、Corollary 4.20 によって、より簡潔な今回の証明を得た。以下に回転対称性からの証明を述べる。

Alternative proof of Theorem 4.21. 力学系の次数が 3 以上の場合、$\mathcal{M}_d$ は原点を中心として $2\pi/(d-1)$ の回転対称性をもつことが容易に示される。すなわち、$\omega = e^{2\pi i/d-1}$ とおけば

$$\begin{aligned} p_{d,\omega c}(\omega z) &= (\omega z)^d + \omega c \\ &= \omega^d z^d + \omega c \\ &= \omega z^d + \omega c \\ &= \omega p_{d,c}(z). \end{aligned}$$

したがって、以下の可換図が成り立つ (上記の z と以下の z は同じ対象をあらわしているわけではないことに注意)。

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathrm{D}} & \xrightarrow{\Psi_d} & \widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{M}_d \\ {\scriptstyle z\mapsto\omega z}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle c\mapsto\omega c} \\ \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathrm{D}} & \xrightarrow[\Psi_d]{} & \widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{M}_d \end{array}$$

可換図より

$$\Psi_d(\omega z) = \omega \Psi_d(z).$$

右辺は

$$\omega \Psi_d(z) = \omega z + \omega \sum_{m=0}^{\infty} b_{d,m} z^{-m}. \tag{4}$$

左辺は

$$\begin{aligned} \Psi_d(\omega z) &= \omega z + \sum_{m=0}^{\infty} b_{d,m} (\omega z)^{-m} \\ &= \omega z + \sum_{m\equiv 0} b_{d,m} z^{-m} + \omega \sum_{m\equiv -1} b_{d,m} z^{-m} + \cdots \\ &\qquad + \omega^{d-2} \sum_{m\equiv 2-d} b_{d,m} z^{-m}. \end{aligned} \tag{5}$$

ここで合同式は $d-1$ を法とする。

(4) と (5) を比較すれば定理の主張を得る。 □

$\mathcal{M}_d$ の図 (Figure 10 など) を見れば、これ以上の回転対称性をもたないことが予測されるが、これは実際に [Lau93] および [LS96] において示されている。したがって回転対称性から得られるゼロ係数は Theorem 4.21 の条件で尽くされていることがわかる。

Theorem の条件から除外されている $d=2$ の場合、$\mathcal{M}$ は回転対称性を有しないが、すべての整数は $d-1=1$ を法とすれば合同であるから -1 とも合同。したがって d を 2 以上としても差し支えない。

Theorem 3.17 の拡張としては、一般に次が成り立つ。

Theorem 4.22. 任意の整数 $\nu \geq 1$ と $K \leq d^{\nu+1}-2d-1$ に対し $m=Kd^{\nu}$ とおく。このとき

$$b_{d,m}=0.$$

Proof. ν より大きい n で $m \leq d^{n+1}-3$ をみたすものをとり $N=n-\nu$ とおけば (3) の最後の部分は

$$w^{j_1+\cdots+j_N} A_{d,\nu}(w)^{K-d^N j_1-\cdots-dj_N} \tag{6}$$

と書ける。指数部分を

$$u=K-d^N j_1-\cdots-dj_N$$

と置き直す。

$u \geq 0$ であれば (6) は多項式になるから Lemma 4.18 の積分には寄与しない。

$u \leq -1$ の場合は

$$(6)=w^{j_1+\cdots+j_N+d^{\nu}u}\,(1+O(1/w))$$

であり、w の指数が -2 以下なら $1/w$ の項は消えるからやはり Lemma 4.18 の積分には寄与しない。

u の定義から

$$j_N=\frac{K-u}{d}-d^{N-1}j_1-\cdots-dj_{N-1}$$

であるから

$$\begin{aligned} j_1+\cdots+j_N &= \frac{K-u}{d}-(d^{N-1}-1)j_1-\cdots-(d-1)j_{N-1} \\ &\leq \frac{K-u}{d}. \end{aligned}$$

したがって $u \leq -1$ より

$$\begin{aligned} j_1+\cdots+j_N+d^{\nu}u &\leq \frac{K-u}{d}+d^{\nu}u \\ &= \frac{1}{d}(K+(d^{\nu+1}-1)u) \\ &\leq \frac{1}{d}(K-(d^{\nu+1}-1)) \\ &= \frac{K+1}{d}-d^{\nu} \end{aligned}$$

$K \leq d^{\nu+1}-2d-1$ であるから、これは高々 -2. □

$d = 2$ の場合はこの定理の条件に当てはまらないゼロ係数は発見されていないが、力学系の次数が 3 以上の場合は更に多くのゼロ係数が存在する。数値実験によって得られたデータから条件が未確定のゼロ係数を拾い出して Table 4.3 にまとめた。

Table 3: Other zero coefficients

次数	数値実験の範囲	未確定ゼロ係数
3	$b_{3,0} \sim b_{3,726}$	$b_{3,21}$, $b_{3,225}$, $b_{3,279}$, $b_{3,333}$, $b_{3,387}$
4	$b_{4,0} \sim b_{4,495}$	$b_{4,56}$, $b_{4,68}$, $b_{4,116}$
5	$b_{5,0} \sim b_{5,622}$	$b_{5.115}$, $b_{5,135}$, $b_{5,155}$, $b_{5,235}$, $b_{5,255}$, $b_{5,355}$
6	$b_{6,0} \sim b_{6,412}$	$b_{6,204}$, $b_{6,234}$, $b_{6,264}$, $b_{6,294}$
7	$b_{7,0} \sim b_{7,206}$	$b_{7,206}$ までの範囲には存在しない。

これらの幾つかは次の定理によって決定される。

Theorem 4.23. 任意の $d \geq 3$ に対し、整数 $\nu \geq 1$ と $K \leq 2(d^{\nu+1} - d - 1)$ で $K \not\equiv -1 \pmod{d}$ をみたす正整数 K をとり $m = Kd^{\nu}$ とおく。このとき

$$b_{d,m} = 0. \tag{7}$$

Proof. $K \not\equiv -1 \pmod{d}$ と ν より大きい n で $m \leq d^{n+1} - 3$ をみたすものをとり $N = n - \nu$ とおけば (3) の最後の部分は

$$w^{j_1+\cdots+j_N} A_{d,\nu}(w)^{K-d^N j_1-\cdots-dj_N} \tag{8}$$

と書ける。指数部分を

$$u = K - d^N j_1 - \cdots - dj_N$$

と置き直す。明らかに $u \equiv K \pmod{d}$, したがって $u \not\equiv -1 \pmod{d}$ である。

$u \geq 0$ であれば (8) は多項式になるから Lemma 4.18 の積分には寄与しない。したがって $u \leq -1$ の場合のみを考えればよい。

$u \leq -1$ の場合 (8) は

$$(8) = w^{j_1+\cdots+j_N+d^{\nu}u}\,(1 + O(1/w))$$

であり、w の指数が -2 以下なら $1/w$ の項は消えるからやはり Lemma 4.18 の積分には寄与しない。

u の定義から

$$j_N = \frac{K-u}{d} - d^{N-1} j_1 - \cdots - dj_{N-1}$$

であるから

$$\begin{aligned} j_1 + \cdots + j_N &= \frac{K-u}{d} - (d^{N-1} - 1)j_1 - \cdots - (d-1)j_{N-1} \\ &\leq \frac{K-u}{d}. \end{aligned}$$

したがって

$$j_1 + \cdots + j_N + d^\nu u \le \frac{K-u}{d} + d^\nu u. \tag{9}$$

$u \le -2$ の場合、右辺は

$$\frac{K-u}{d} + d^\nu u \le \frac{K+2}{d} - 2d^\nu$$

となるから、$K \le 2(d^{\nu+1} - d - 1)$ であれば高々 -2. 定理の K はこの条件をみたすから結局、$u = -1$ の場合のみを考えればよいことになる。

$u \not\equiv -1 \pmod{d}$ であったから $u = -1$ にはなりえない。 □

4.4 Some Nonzero Coefficients

Theorem 4.21 より、係数 $b_{d,m}$ が非ゼロであるためには $m \equiv -1 \pmod{d-1}$ でなければならない。このことと Corollary 4.20 から直接次を得る。

Theorem 4.24. $m \le d^2 - 3$ をみたす整数 $m \equiv -1 \pmod{d-1}$ に対し

$$b_{d,m} = -\frac{1}{m} C_{\frac{m+1}{d-1}} \left(\frac{m}{d}\right).$$

Proof. Corollary 4.20 において $n = 1$ とすれば m に課せられる条件は $m \le d^2 - 3$. このとき係数 $b_{d,m}$ は

$$b_{d,m} = -\frac{1}{m} \sum C_{j_1}(m/d)$$

となり、summation は $(d-1)j_1 = m+1$ をみたす正整数 j_1 にわたるから $j_1 = \dfrac{m+1}{d-1}$. □

Corollary 4.25. 最初の非ゼロ係数は

$$b_{d,d-2} = -\frac{1}{d}.$$

Proof. $m \equiv -1 \pmod{d-1}$ より、最初の非ゼロ係数は $m = d-2$ のときに出現する。これを Theorem 4.24 にあてはめれば主張を得る。 □

Example ($d = 3, m = 5$). Theorem 4.24 を利用して $b_{3,5}$ を求めてみる。

$d = 3, m = 5$ は条件をみたすから

$$\begin{aligned} b_{3,5} &= -\frac{1}{5} C_{\frac{5+1}{3-1}} \left(\frac{5}{3}\right) \\ &= -\frac{1}{5} C_3 \left(\frac{5}{3}\right) \\ &= -\frac{1}{5} \cdot \frac{5/3 \cdot 2/3 \cdot -1/3}{3!} \\ &= -\frac{1}{5} \cdot \frac{5 \cdot 2 \cdot (-1)}{3^3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \\ &= \frac{1}{3^4}. \end{aligned}$$

Corollary 4.20 を直接用いて非ゼロ係数を決定する方法は、n の増加にともなって場合の数が急激に増大するため非常に困難である。そこで以下では Theorem 4.22 における $K \leq d^{\nu+1} - 2d - 1$ という条件を変えて、非ゼロ係数を幾つか決定する。

$m = Kd^{\nu} \equiv -1 \pmod{d-1}$ でなければならないから $K \equiv -1 \pmod{d-1}$, なおかつ $d \nmid K$ の必要がある。$d^{\nu+1} - 2d - 1$ より大きく、d で整除されない正整数で $K \equiv -1 \pmod{d-1}$ となる最小の K は $d^{\nu+1} - d - 1$ である。

まず $A_{d,n}(c)$ の一般形を求めておく必要がある。$A_{d,n}(c)$ を一般に次のように記述する。

$$A_{d,n}(c) = \sum_{i=0}^{d^n-1} a_i^{(n)} c^{d^n-i}, \quad (a_{d^n-1}^{(n)} = 1).$$

Claim 4.26. 任意の n と $i \not\equiv 0 \pmod{d-1}$ に対して $a_i^{(n)} = 0$.

Proof. 帰納法を用いて容易に示される。

まず、$n = 1$ のとき $A_{d,n}(c) = c^d + c$ であるから要求はみたされる。

$n = k$ のとき成り立つと仮定すれば、$n = k + 1$ のときも

$$\begin{aligned} A_{d,k+1} &= A_{d,k}(c)^d + c \\ &= \left(\sum_{i=0}^{d^k-1} a_i^{(k)} c^{d^k-i} \right)^d + c \\ &= \sum_{i_1=0}^{d^k-1} \cdots \sum_{i_d=0}^{d^k-1} a_{i_1}^{(k)} \cdots a_{i_d}^{(k)} c^{d^{n+1}-(i_1+\cdots+i_d)} + c. \end{aligned} \tag{10}$$

したがって $a_{i_1+\cdots+i_d}^{(k+1)} = a_{i_1}^{(k)} \cdots a_{i_d}^{(k)}$ であるから $a_{i_1+\cdots+i_d}^{(k+1)} \neq 0$ であるためには $i_1 \equiv \cdots \equiv i_d \equiv 0 \pmod{d-1}$ でなければならない。ゆえに $i_1 + \cdots + i_d \equiv 0 \pmod{d-1}$ となり、帰納法は完成した。 □

Claim 4.27. $A_{d,n}(c)$ は一般に次のように記述可能。

$$A_{d,n}(c) = c^{d^n} + d^{n-1} c^{d^n-d+1} + \frac{d^{n-1}(d^{n-1}-1)}{2} c^{d^n-2d+2} + \cdots. \tag{11}$$

Proof. (10) において $I = i_1 + \cdots + i_d$ とおく。各 $i_j \in \mathbb{N}^+$ かつ $I \equiv 0 \pmod{d-1}$ であることに注意すれば、

- $I = 0$ となるのは $i_1 = \cdots = i_d = 0$ の場合のみ。したがって

$$a_0^{(n)} = \left(a_0^{(n-1)} \right)^d.$$

$a_0^{(0)} = 1$ より、$a_0^{(n)} = 1$.

- $I = d-1$ の場合は、ある正整数 $j \leq d$ に関して $i_j = d-1$, $j \neq k$ に関して $i_k = 0$ となる場合についてのみ考えればよい。したがって

$$\begin{aligned} a_{d-1}^{(n)} &= a_{d-1}^{(n-1)} a_0^{(n-1)} \cdots a_0^{(n-1)} \times d \\ &= d a_{d-1}^{(n-1)}. \end{aligned}$$

  $a_{d-1}^{(1)} = 1$ より、$a_{d-1}^{(n)} = d^{n-1}$.

- $I = 2d-2$ の場合は

$$\begin{cases} j \leq d \text{ に対し } i_j = 2d-2,\ k \neq j \text{ に対して } i_k = 0, \\ j_1 \neq j_2 \leq d \text{ に対し } i_{j_1} = i_{j_2} = d-1,\ k \neq j_1, j_2 \text{に対して } i_k = 0. \end{cases}$$

  の二通りがある。したがって

$$\begin{aligned} a_{2d-2}^{(n)} &= a_{2d-2}^{(n-1)} \times d + a_{d-1}^{(n-1)} a_{d-1}^{(n-1)} \times \frac{d(d-1)}{2} \\ &= d a_{2d-2}^{(n-1)} + \frac{d^{2n-3}(d-1)}{2} \end{aligned}$$

  $a_{2d-2}^{(2)} = d(d-1)/2$ より、$a_{2d-2}^{(n)} = d^{n-1}(d^{n-1}-1)/2$.

□

Claim 4.28. $A_{d,n}^{-1}(c)$ は一般に次のように記述可能。

$$A_{d,n}^{-1}(c) = c^{-d^n} - d^{n-1} c^{-d^n-d+1} - \frac{d^{n-1}(d^{n-1}+1)}{2} c^{-d^n-2d+2} + \cdots.$$

Proof. (11) 式から素直に計算すれば求められる。 □

Claim 4.28 は次の Theorem を証明するために準備された。

Theorem 4.29. 任意の整数 ν と K に対し、$m = Kd^\nu$ とおく。

- $\nu \geq 1$, $K = d^{\nu+1} - d - 1$ のとき

$$b_{d,m} = -\frac{1}{m} C_{d^\nu - 1}\left(\frac{K}{d}\right). \tag{12}$$

- $\nu \geq 1$, $K = d^{\nu+1} + d^2 - 2d - 1$ のとき

$$b_{d,m} = \frac{1}{md^2}\left(d^{\nu+1} C_{d^\nu+d-2}\left(\frac{K}{d}\right) - K C_{d^\nu-2}\left(\frac{K}{d} - d\right)\right). \tag{13}$$

- $\nu \geq 2$, $K = d^{\nu+1} + 2d^2 - 3d - 1$ のとき

$$\begin{aligned} b_{d,m} = \frac{1}{2md^4}\Bigg(& d^{\nu+3}(d^{\nu-1}+1) C_{d^\nu+2d-3}\left(\frac{K}{d}\right) \\ & + 2d^{\nu+1} K C_{d^\nu+d-3}\left(\frac{K}{d} - d\right) - K(K-d^2) C_{d^\nu-3}\left(\frac{K}{d} - 2d\right)\Bigg). \end{aligned} \tag{14}$$

Proof. ν より大きい n で $m \le d^{n+1} - 3$ をみたすものをとり $N = n - \nu$ とおけば (3) の最後の部分は

$$w^{j_1+\cdots+j_N} A_{d,\nu}(w)^{K-d^N j_1-\cdots-dj_N} \tag{15}$$

と書ける。$A_{d,\nu}$ の指数部分を

$$u = K - d^N j_1 - \cdots - dj_N \tag{16}$$

と置き直せば、明らかに $u \equiv K \equiv -1 \pmod{d}$ である。与えられた K は Theorem 4.23 の条件をみたすから、$d \ge 3$ のときは $u = -1$ の場合についてのみ考えればよい。$d = 2$ のときも $u \le -3$ のとき (9) 式の右辺は

$$\frac{K-u}{d} + d^\nu u \le \frac{K - 3(d^{\nu+1} - 1)}{d}$$

となるから、$K \le 3d^{\nu+1} - 2d - 3$ であれば右辺は高々 -2. あたえられた K はこの条件をみたす。

したがって、すべての d に関して $u = -1$ の場合のみを考えればよいから (15) 式は

$$w^{j_1+\cdots+j_N-d^\nu}\,(1 + O(1/w))$$

と記述される。

u の定義から

$$j_N = \frac{K+1}{d} - d^{N-1} j_1 - \cdots - dj_{N-1}$$

であるから

$$\begin{aligned} j_1 + \cdots + j_N - d^\nu &= \frac{K+1}{d} - d^\nu - (d^{N-1} - 1)j_1 - \cdots - (d-1)j_{N-1} \\ &\le \frac{K+1}{d} - d^\nu. \end{aligned} \tag{17}$$

Claim 4.26 より

$$j_1 + \cdots + j_N - d^\nu \equiv -1 \pmod{d-1}$$

であることに注意すれば

- $K = d^{\nu+1} - d - 1$ のとき (17) 式の右辺は -1.

  ここで、等号がみたされるのは

$$j_1 = \cdots j_{N-1} = 0, \quad j_N = \frac{K+1}{d} = d^\nu - 1$$

のときに限る。したがって

$$\begin{aligned} -mb_m &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=R} A_n(w)^{m/d^n}\,dw \\ &= C_{j_N}\left(m/d^{n-N+1} - d^{N-1}j_1 - \cdots - dj_{N-1}\right) \\ &= C_{j_N}\left(m/d^{\nu+1}\right) \\ &= C_{d^\nu-1}\left(\frac{K}{d}\right). \end{aligned}$$

ゆえに

$$b_m = -\frac{1}{m}C_{d^\nu-1}\left(\frac{K}{d}\right).$$

- $K = d^{\nu+1} + d^2 - 2d - 1$ のとき(17) 式の右辺は $d-2$.

  左辺が $d-2$ となるのは

$$j_1 = \cdots j_{N-1} = 0, \quad j_N = \frac{K+1}{d} = d^\nu + d - 2$$

  のときに限り、左辺が -1 となるのは

$$j_1 = \cdots j_{N-2} = 0, \quad j_{N-1} = 1, \quad j_N = \frac{K+1}{d} - d = d^\nu - 2$$

  のときに限る。

  Claim 4.28 より

$$\begin{aligned} w^{j_1+\cdots+j_N}A_{d,\nu}(w)^{-1} = w^{j_1+\cdots+j_N-d^\nu} &- d^{\nu-1}w^{j_1+\cdots+j_N-d^\nu-d+1} \\ &- \frac{1}{2}d^{\nu-1}(d^{\nu-1}+1)w^{j_1+\cdots+j_N-2d+2} + \cdots \end{aligned}$$

  であるから、$j_1 + \cdots + j_N - d^\nu = d-2$ のとき

$$-d^{\nu-1}C_{j_N}\left(\frac{m}{d^{\nu+1}} - d^{N-1}j_1 - \cdots - dj_{N-1}\right) = -d^{\nu-1}C_{d^\nu+d-2}\left(\frac{K}{d}\right)$$

  が残り、$j_1 + \cdots + j_N - d^\nu = -1$ のとき

$$\begin{aligned} C_{j_{N-1}}\left(\frac{m}{d^{\nu+2}} - d^{N-1}j_1 - \cdots - dj_{N-2}\right) &\times C_{j_N}\left(\frac{m}{d^{\nu+1}} - d^{N-1}j_1 - \cdots - dj_{N-1}\right) \\ &= C_1\left(\frac{K}{d^2}\right)C_{d^\nu-2}\left(\frac{K}{d} - d\right) \\ &= \frac{K}{d^2}C_{d^\nu-2}\left(\frac{K}{d} - d\right) \end{aligned}$$

が残る。結局

$$-mb_{d,m} = -d^{\nu-1}C_{d^\nu+d-2}\left(\frac{K}{d}\right) + \frac{K}{d^2}C_{d^\nu-2}\left(\frac{K}{d}-d\right)$$

となるから求める係数は

$$b_{d,m} = \frac{1}{md^2}\left(d^{\nu+1}C_{d^\nu+d-2}\left(\frac{K}{d}\right) - KC_{d^\nu-2}\left(\frac{K}{d}-d\right)\right).$$

- $K = d^{\nu+1}+2d^2-3d-1$ のとき(17) 式の右辺は $2d-3$.

  左辺が $2d-3$ となるのは

$$j_1 = \cdots j_{N-1} = 0, \quad j_N = \frac{K+1}{d} = d^\nu + 2d - 3$$

のときに限り、このとき

$$-\frac{1}{2}d^{\nu-1}(d^{\nu-1}+1)C_{j_N}\left(\frac{m}{d^{\nu+1}}\right) = -\frac{1}{2}d^{\nu-1}(d^{\nu-1}+1)C_{d^\nu+2d-3}\left(\frac{K}{d}\right)$$

が残る。また、左辺が $d-2$ となるのは

$$j_1 = \cdots j_{N-2} = 0, \quad j_{N-1} = 1, \quad j_N = \frac{K+1}{d} - d = d^\nu + d - 3$$

のときに限り、このとき

$$\begin{aligned}-d^{\nu-1}C_{j_{N-1}}\left(\frac{m}{d^{\nu+2}}\right)C_{j_N}\left(\frac{m}{d^{\nu+1}}-dj_{N-1}\right) &= -d^{\nu-1}C_1\left(\frac{K}{d^2}\right)C_{d^\nu+d-3}\left(\frac{K}{d}-d\right)\\ &= -d^{\nu-1}\frac{K}{d^2}C_{d^\nu+d-3}\left(\frac{K}{d}-d\right)\end{aligned}$$

が残る。そして、左辺が -1 となるのは

$$j_1 = \cdots j_{N-2} = 0, \quad j_{N-1} = 2, \quad j_N = \frac{K+1}{d} - 2d = d^\nu - 3$$

のときに限り、このとき

$$\begin{aligned}C_{j_{N-1}}\left(\frac{m}{d^{\nu+2}}\right)C_{j_N}\left(\frac{m}{d^{\nu+1}}-dj_{N-1}\right) &= C_2\left(\frac{K}{d^2}\right)C_{d^\nu-3}\left(\frac{K}{d}-2d\right)\\ &= \frac{1}{2d^4}K(K-d^2)C_{d^\nu-3}\left(\frac{K}{d}-2d\right)\end{aligned}$$

が残る。

したがって

$$\begin{aligned}-mb_{d,m} = &-\frac{1}{2}d^{\nu-1}(d^{\nu-1}+1)C_{d^\nu+2d-3}\left(\frac{K}{d}\right)\\ &-d^{\nu-1}\frac{K}{d^2}C_{d^\nu+d-3}\left(\frac{K}{d}-d\right) + \frac{1}{2d^4}K(K-d^2)C_{d^\nu-3}\left(\frac{K}{d}-2d\right)\end{aligned}$$

となるから、結局

$$b_{d,m} = \frac{1}{2md^4}\left(d^{\nu+3}(d^{\nu-1}+1)C_{d^\nu+2d-3}\left(\frac{K}{d}\right) + 2d^{\nu+1}KC_{d^\nu+d-3}\left(\frac{K}{d}-d\right) - K(K-d^2)C_{d^\nu-3}\left(\frac{K}{d}-2d\right)\right)$$

を得る。

□

Remark. おのおのの式に $d=2$ を代入し整理すれば Theorem 3.19 を得る。

Theorem 4.30. 任意の $m \in \mathbb{N}^+$ に対し、整数 r を *gauss* 記号を用いて

$$r = \left[\frac{1}{d-1}\operatorname{ord}_d\left((d(m+1))!\right)\right]$$

とおけば $d^r b_{d,m} \in \mathbb{Z}$. $d \nmid m$ または $m = d-2$ のときに限って $d^{r-1}b_{d,m} \notin \mathbb{Z}$.

Proof. Lemma 4.17 から、ある整数 r をとれば $d^r b_{d,m} \in \mathbb{Z}$ である。また、Corollary 4.20 によって $m \leq d^{n+1}-3$ をみたす正整数 n をとれば係数 $b_{d,m}$ は

$$b_{d,m} = -\frac{1}{m}\sum C_{j_1}\left(m/d^n\right)\cdots C_{j_n}\left(m/d - d^{n-1}j_1 - \cdots - dj_{n-1}\right).$$

と書ける。おのおのの combination の分母の order が

$$(n-i+1)j_i + \operatorname{ord}_d(j_i!) - j_i\operatorname{ord}_d(m)$$

以下となることは容易に確かめられる。等しくなるのは $d \nmid m$ のときで、このときはもちろん最終項も消える。どちらにしても r として

$$\operatorname{ord}_d(m) + \max\left\{\sum_{i=1}^{n}\left((n-i+1)j_i + \operatorname{ord}_d(j_i!) - j_i\operatorname{ord}_d(m)\right)\right\}$$

をとればよい。

$(d^n-1)j_1 + \cdots + (d-1)j_n = m+1$ の条件をみたしつつ上式を最大にする $j_1, \cdots, j_n$ の組み合わせは j_n を最大にとればよいことがわかる。したがって

$$j_1 = \cdots = j_{n-1} = 0, \quad j_n = \frac{m+1}{d-1}.$$

このとき r は

$$r = \operatorname{ord}_d(m) + \frac{m+1}{d-1} + \operatorname{ord}_d\left(\frac{m+1}{d-1}!\right) - \frac{m+1}{d-1}\operatorname{ord}_d(m)$$

となる。$\frac{m+1}{d-1}$ は常に正整数であるから

$$r \leq \frac{m+1}{d-1} + \mathrm{ord}_d\left(\frac{m+1}{d-1}!\right)$$

であり、等号は $d \nmid m$ または $\frac{m+1}{d-1} = 1$ のときに限り成立する。

$\mathrm{ord}_d(x!)$ はガウス記号を用いて $\mathrm{ord}_d(x!) = \sum_{i=1}^{\infty} \left[x/d^i\right]$ と書き表せることに注意すれば

$$\begin{aligned}
r &\leq \frac{m+1}{d-1} + \mathrm{ord}_d\left(\frac{m+1}{d-1}!\right) \\
&= \frac{m+1}{d-1} + \sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{m+1}{d^i(d-1)}\right] \\
&= \frac{m+1}{d-1} + \left[\frac{1}{d-1}\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{m+1}{d^i}\right]\right] \\
&= \left[\frac{1}{d-1}\sum_{i=0}^{\infty}\left[\frac{m+1}{d^i}\right]\right] \\
&= \left[\frac{1}{d-1}\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{d(m+1)}{d^i}\right]\right] \\
&= \left[\frac{1}{d-1}\,\mathrm{ord}_d\left((d(m+1))!\right)\right].
\end{aligned}$$

等式が成立するのはもちろん $d \nmid m$ または $m = d-2$ のときに限る。これが証明すべきことであった。 □

Theorem 4.30 の Corollary として Conjecture 3.16 が示される。

Corollary 4.31 (Zagier's conjecture [BFH93]). $b_{2,m}$ を既約分数で $a/2^r$ とあらわせば、任意の $m \in \mathbb{N}^+$ に対し $r \leq \mathrm{ord}_2((2m+2)!)$. 等号がみたされるのは $m = 0$ または m が奇数の場合に限る。

Proof. Theorem 4.30 において $d = 2$ とすれば

$$\begin{aligned}
r &\leq \left[\frac{1}{2-1}\,\mathrm{ord}_2\left((2(m+1))!\right)\right] \\
&= \left[\mathrm{ord}_2\left((2(m+1))!\right)\right] \\
&= \mathrm{ord}_2\left((2m+2)!\right).
\end{aligned}$$

等号がみたされるのは $d \nmid m$ または $m = d-2$ のときであった。したがって $m = 0$ または m が奇数のときに限って等号はみたされる。 □

5 Filled-in Julia sets

本章では、前章までの議論を filled-in Julia 集合に応用する。
$c \in \mathcal{M}_d$ であれば写像 $p_{d,c}(z) = z^d + c$ の filled-in Julia 集合

$$\mathcal{K}_{p_{d,c}} = \left\{ z \in \widehat{\mathbb{C}} : \lim_{n\to\infty} |p_{d,c}^n(z)| \not\to \infty \right\}$$

は連結であるから等角写像 (一意化写像) $\psi_{d,c} : \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathrm{D}} \to \widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{K}_{p_{d,c}}$ が存在する。この写像の無限遠点における Laurent 展開

$$\psi_{d,c}(z) = z + \sum_{m=0}^{\infty} \beta_{d,m} z^{-m} \tag{18}$$

の各係数を計算することが可能である。

filled-in Julia 集合に関する一意化写像族の係数は c を parameter として記述される (Lemma 5.14) が connectedness locus に関するそれとは異なり、Theorem 5.18 や Theorem 5.20 などにみられるように非常に統一的な性質をもっている。また、非常に詳しく研究されてきたことから、局所連結性を有する (または有しない) ような parameter の特徴づけに関して得られていることも多い。例えば、$d = 2$ のときは parameter として hyperbolic point をとれば、その Julia 集合は局所連結であることが知られている。また、[LvS95] は次数 d が偶数のとき、parameter を $\mathbb{R} \cup \mathcal{M}_d$ からとれば、その Julia 集合は局所連結であることを示している。

前章とほぼ同様の議論によって一意化写像 $\psi_{d,c}$ を構成することが可能である。実際、Douady と Hubbard [DH82] による Theorem 3.3 の証明は一意化写像 $\phi_c = \psi_c^{-1}$ を構成し、その定義域を c にまで拡張可能であることを示すことによって Φ を定義している。

5.1 Construct of Conformal mapping $\psi_{d,c}$

以後の議論において $c \in \mathcal{M}_d$ とする。定義および定理は特に断らない限り一般の $d \geq 2$ に対する主張である。

Claim 5.1. ある整数 $k \geq 0$ が存在し、$|p_{d,c}^k(z)| > 2^{1/(d-1)}$ となるなら

$$\lim_{n\to\infty} |p_{d,c}^n| = \infty.$$

Proof. $c \in \mathcal{M}_d$ であるから Claim 4.4 より $|c| \leq 2^{1/(d-1)}$. これに注意すれば Claim 4.4 と同様に示される。 □

したがって、ある整数 $k \geq 0$ に対し $|p_{d,c}^k(z)| > 2^{1/(d-1)}$ となれば $c \notin \mathcal{K}_{p_{d,c}}$ である。そこで各 $k \geq 0$ に対して $|p_{d,c}^k(z)| > 2^{1/(d-1)}$ となるような z 全体の集合を $V_{d,c,k}$ とおく。

Definition 5.2.

$$V_{d,c,n} = \left\{ z \in \widehat{\mathbb{C}} : |p_{d,c}^n(z)| > 2^{1/(d-1)} \right\}.$$

Claim 5.3.

$$\widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{K}_{p_{d,c}} = \bigcup_{i=0}^{\infty} V_{d,c,i}.$$

Proof. Claim 4.6 と同様にして示される。 □

Claim 5.4. ある整数 $k \geq 0$ に対し $p_{d,c}^k(z) = 0$ となれば $z \in \mathcal{K}_{p_{d,c}}$.

Proof. $p_{d,c}^k(z) = 0$ ということは $p_{d,c}^{k+1}(z) = c = p_{d,c}(0)$, つまり z の orbit $\mathcal{O}^+_{p_{d,c}}(z)$ は $k-1$ 個を除いて critical orbit $\mathcal{O}^+_{p_{d,c}}(0)$ と等しい。$\mathcal{K}_{p_{d,c}}$ の定義より $c \in \mathcal{M}_d$ なら $\mathcal{O}^+_{p_{d,c}}(0)$ は有界であったから $\mathcal{O}^+_{p_{d,c}}(z)$ も有界。したがって $z \in \mathcal{K}_{p_{d,c}}$. □

Claim 5.4 より、$p_{d,c}^n(z)$ は $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{K}_{p_{d,c}}$ においてゼロ点を持たないから、Definition 4.8 と同様に $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{K}_{p_{d,c}}$ を定義域とする写像列 $\{\tau_{d,c,n}\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ を次のように定義することができる。

Definition 5.5.

$$\tau_{d,c,0}(z) = c, \qquad \tau_{d,c,n}(z) = \left(\frac{p_{d,c}^n(z)}{p_{d,c}^{n-1}(z)^d}\right)^{1/d^n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

更にこれを用いて写像列 $\{\phi_{d,c,n}\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ を以下のように定義する。

Definition 5.6.

$$\phi_{d,c,n}(z) = \prod_{i=0}^{n} \tau_{d,c,i}(z).$$

写像 $\phi_{d,c,n}$ は $\mathcal{M}_d$ に対する $\Phi_{d,n}$ と同様、次の二つをみたすように構成された。

Claim 5.7.

1. $\phi_{d,c,n}(z)^{d^n} = p_{d,c}^n(z)$,
2. $\phi_{d,c,n}(z) \quad = z + O(1)$.

Proof. Claim 4.10 と同様にして示される。 □

Claim 5.8. $\phi_{d,c,k}$ を $V_{d,c,k}$ に制限すれば単射となり、$\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{D}_{2^{1/d^k(d-1)}}$ へ全射となる。

$$\phi_{d,c,k}|_{V_{d,c,k}} : V_{d,c,k} \to \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{D}_{2^{1/d^k(d-1)}}.$$

Proof. Claim 4.11 と同様にして示される。 □

Claim 5.9.

$$\tau_{d,c,n}(z) = 1 + O\left(\frac{1}{z^{d^n-1}}\right).$$

Claim 5.10.

$$\phi_{d,c,n+1}(z) = \phi_{d,c,n}(z) + O\left(1/z^{d^{n+1}-2}\right).$$

Proof. Claim 4.13 と同様、

$$\begin{aligned}\phi_{d,c,n+1}(z) &= \prod_{i=0}^{n+1} \tau_{d,c,i}(z) \\ &= \phi_{d,c,n}(z) \cdot \tau_{d,c,n+1}(z) \\ &= \phi_{d,c,n}(z) \left(1 + O\left(\frac{1}{z^{d^{n+1}-1}}\right)\right) \\ &= \phi_{d,c,n}(z) + O\left(\frac{1}{z^{d^{n+1}-2}}\right).\end{aligned}$$

□

つまり、無限遠点 ∞ における $\phi_{d,c,n+1}$ と $\phi_{d,c,n}$ の Laurent 展開は

$$z + \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{z} + \frac{\alpha_2}{z^2} + \cdots + \frac{\alpha_{d^{n+1}-3}}{z^{d^{n+1}-3}}$$

まで一致する。

$\tau_{d,c,n}$ の定義域は $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{K}_{p_{d,c}}$ であったから n が十分大きければ $|p_{d,c}^{n-1}(z)| \to \infty$. したがって、極限写像が存在して一様収束する。これを $\phi_{d,c}$ とおく。

Definition 5.11.

$$\phi_{d,c}(z) = \prod_{i=0}^{\infty} \tau_{d,c,i}(z).$$

明らかに写像 $\phi_{d,c}$ は $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{K}_{p_{d,c}}$ から $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathrm{D}}$ への双正則写像である。

我々が求めたいのは $\phi_{d,c}$ の逆写像 $\psi_{d,c} = \phi_{d,c}^{-1} : \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathrm{D}} \to \widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{K}_{p_{d,c}}$ である。$\psi_{d,c}$ を無限遠点で Laurent 展開したときの z^{-m} の係数を $\beta_{d,m}$ であらわす。

$$\psi_{d,c}(z) = z + \sum_{m=0}^{\infty} \beta_{d,m} z^{-m}.$$

Claim 5.10 より $\phi_{d,c}(z) = \phi_{d,c,n}(z) + O(1/z^{d^{n+1}-2})$ であり、これと $\phi_{d,c}(\psi_{d,c}(z)) = z$ を比較すれば次を得る。

Claim 5.12.

$$\phi_{d,c,n}(\psi_{d,c}(z)) = z + O\left(1/z^{d^{n+1}-2}\right).$$

これと Claim 5.7 の 1 から数値計算に必要となる次の関係を得る。

Claim 5.13.

$$p_{d,c}^{n}(\psi_{d,c}(z)) = z^{d^n} + O\left(\frac{1}{z^{d^{n+1}-d^n-1}}\right).$$

Proof.

$$\begin{aligned} p_{d,c}^n(\psi_{d,c}(z)) &= \phi_{d,c,n}(\psi_{d,c}(z))^{d^n} \\ &= \left(z + O(1/z^{d^{n+1}-2})\right)^{d^n} \\ &= z^{d^n} + d^n z^{d^n-1} O(1/z^{d^{n+1}-2}) + \cdots \\ &= z^{d^n} + O(1/z^{d^{n+1}-d^n-1}). \end{aligned}$$

□

したがって、写像 ψ に関しても Jungreis のアルゴリズムは適用可能である。また、Claim 4.17 と同様にすれば $\psi_{d,c}$ の係数 $\beta_{d,i}$ に関しても次が成り立つことが容易に示される。

Lemma 5.14. 任意の $m \in \mathbb{N}^+$ に対し

$$\beta_{d,m} \in \mathbb{Q}_{(d)}[c].$$

ここで $\mathbb{Q}_{(d)}[c]$ は $\mathbb{Q}_{(d)}$ を係数とする c の多項式を意味する。

Jungreis' Algorithm for filled-in Julia set

$\beta_{d,0}, \beta_{d,1}, \cdots, \beta_{d,i}$ を求めたいとする。

1. $\widehat{\psi}_{d,c,n}(z) = z + \sum_{m=0}^{i} \beta_{d,m} z^{-m}$ とおく。
2. $i \leq d^{n+1} - 3$ をみたす整数 $n \geq 1$ をとる。
3. $p_{d,c}^n$ に $\widehat{\psi}_{d,c,n}(z)$ を代入して計算し、$z^{d^n-1}, \cdots, z^{d^n-(d-1)i-1}$ の係数を代数式として求める。
4. 得られた係数の式から $\beta_{d,0}, \beta_{d,1}, \cdots, \beta_{d,i}$ を帰納的に求める。

Example. $d = 2$ の場合について、最初の 2 項 $\beta_{2,0}, \beta_{2,1}$ を求める $(i = 1)$。

1. $\widehat{\psi}_{2,c,1}(z) = z + \beta_{2,0} + \beta_{2,1}/z$.
2. $i = 1 \leq 2^{1+1} - 3$ であるから $n = 1$ にとる。
3. $p_{2,c}$ に代入して計算すれば

$$\begin{aligned} p_{2,c}(\widehat{\psi}_{2,c,1}(z)) &= \widehat{\psi}_{2,c,1}(z)^2 + c \\ &= z^2 + 2\beta_{2,0} z + (2\beta_{2,1} + \beta_{2,0}^2 + c) + 2\beta_{2,0}\beta_{2,1} z^{-1} + \beta_{2,1}^2 z^{-2}. \end{aligned}$$

4. z^1 の係数 $2\beta_{2,0} = 0$ より $\beta_{2,0} = 0$,
   z^0 の係数 $2\beta_{2,1} + \beta_{2,0}^2 + c = 0$ より $\beta_{2,1} = -c/2$ を得る。

このようにして計算した $\psi_{2,c}, \psi_{3,c}, \psi_{4,c}$ の係数を Table 4-6 にまとめた。分母は d の冪とした。係数がゼロになる場合は省略した。

Table 4: Coefficients of ψ_2

index	numerator	denominator
1	$-c$	1
3	$-c^2-2c$	3
5	$-c^3-2c^2$	4
7	$-5c^4-12c^3-12c^2-16c$	7
9	$-7c^5-20c^4-20c^3-16c^2$	8
11	$-21c^6-70c^5-84c^4-104c^3-96c^2$	10
13	$-33c^7-126c^6-180c^5-200c^4-160c^3$	11
15	$-429c^8-1848c^7-3080c^6-3584c^5$ $-3920c^4-2688c^3-1792c^2-2048c$	15
17	$-715c^9-3432c^8-6552c^7-8256c^6$ $-8880c^5-5760c^4-2304c^3-2048c^2$	16
19	$-2431c^{10}-12870c^9-27720c^8-38192c^7-43120c^6$ $-36960c^5-28160c^4-23040c^3-12288c^2$	18
21	$-4199c^{11}-24310c^{10}-58344c^9-87984c^8-105456c^7$ $-96096c^6-66560c^5-43520c^4-20480c^3$	19
23	$-29393c^{12}-184756c^{11}-489060c^{10}-805200c^9$ $-1028720c^8-1020096c^7-819392c^6-689920c^5$ $-494592c^4-315392c^3-229376c^2$	22
25	$-52003c^{13}-352716c^{12}-1021020c^{11}-1828112c^{10}$ $-2492880c^9-2673216c^8-2268480c^7-1761024c^6$ $-1152000c^5-577536c^4-294912c^3$	23
27	$-185725c^{14}-1352078c^{13}-4249388c^{12}-8237944c^{11}$ $-11988240c^{10}-13810720c^9-12640320c^8-10451584c^7$ $-8318464c^6-5744640c^5-4055040c^4-2162688c^3$	25

Table 5: Coefficients of ψ_3

index	numerator	denominator
2	$-c$	1
5	$-c^2$	2
8	$-5c^3 - 9c$	4
11	$-10c^4 - 18c^2$	5
14	$-22c^5 - 45c^3$	6
17	$-154c^6 - 360c^4 - 324c^2$	8
20	$-374c^7 - 990c^5 - 891c^3$	9
23	$-935c^8 - 2772c^6 - 2835c^4$	10

Table 6: Coefficients of ψ_4

index	numerator	denominator
3	-1	1
7	$-6c^2$	3
11	$-14c^3$	4
15	$-154c^4 - 256c$	6
19	$-462c^5 - 768c^2$	7
23	$-1463c^6 - 2688c^3$	8

5.2 Coefficient Formula

Lemma 4.18 と同様にして $\psi_{d,c}(z)$ の各係数を理論的に考察するために有用な係数の公式を得る。

Lemma 5.15. $1 \leq m \leq d^{n+1} - 3$, R 十分大であるとする。このとき

$$-m\beta_{d,m} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=R} p_{d,c}^n(w)^{m/d^n} dw.$$

Proof. $z = \phi_{d,c}(w)$ とおけば $w = \psi_{d,c}(z)$ であるから $dw = \psi'_{d,c}(z)dz$. したがって留数定理より

$$\begin{aligned} -m\beta_{d,m} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} z^m \psi'_{d,c}(z) dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=R} \phi_{d,c}(w)^m dw \end{aligned}$$

$m \leq d^{n+1} - 3$ をみたしているから $\phi_{d,c}(w)^m$ の留数と $\phi_{d,c,n}(w)^m$ の留数とは等しい。したがって $\phi_{d,c}(w)^m$ は $\phi_{d,c,n}(w)^m$ と交換可能で

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=R} \phi_{d,c,n}(w)^m dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=R} p_{d,c}^n(w)^{m/d^n} dw \end{aligned}$$

□

Remark. $p_{d,c}^n(w)^{m/d^n}$ の無限遠点での Laurent 展開の $1/w$ の係数から $\psi_{d,c}$ の係数を求めることができることに注意。

Lemma 5.15 をより利用し易い表記にしておく。

Theorem 5.16. $1 \leq m \leq d^{n+1} - 3$ をみたす n と $1 \leq N \leq n$ に対し、$-m\beta_{d,m}$ は次式を *Laurent* 展開したときの $1/w$ の係数である。

$$\begin{aligned} \sum_{j_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{j_N=0}^{\infty} & C_{j_1}\left(m/d^{n+1}\right) \cdots C_{j_N}\left(m/d^{n-N+1} - d^{N-1}j_1 - \cdots - dj_{N-1}\right) \\ & \times c^{j_1+\cdots+j_N} p_{d,c}^{n-N}(w)^{m/d^{n-N} - d^N j_1 - \cdots - dj_N}. \end{aligned} \tag{19}$$

Proof. Lemma 5.15 より、$p_{d,c}^n(w)^{m/d^n}$ が (19) と等しくなることがいえればよい。

$|w|$ が十分に大きければ $p^n_{d,c}(w)$ は

$$\begin{aligned}
p^n_{d,c}(w)^{m/d^n} &= \left(p^{n-1}_{d,c}(w)^d + c\right)^{m/d^n} \\
&= p^{n-1}_{d,c}(w)^{m/d^{n-1}} \left(1 + \frac{c}{p^{n-1}_{d,c}(w)^d}\right)^{m/d^n} \\
&= \sum_{j_1=0}^{\infty} C_{j_1}\left(m/d^n\right) c^{j_1} p^{n-1}_{d,c}(w)^{m/d^{n-1}-dj_1} \\
&= \sum_{j_1=0}^{\infty} C_{j_1}\left(m/d^n\right) c^{j_1} p^{n-2}_{d,c}(w)^{m/d^{n-2}-d^2 j_1} \left(1 + \frac{c}{p^{n-2}_{d,c}(w)^d}\right)^{m/d^{n-1}-dj_1} \\
&= \sum_{j_1=0}^{\infty}\sum_{j_2=0}^{\infty} C_{j_1}\left(m/d^n\right) C_{j_2}\left(m/d^{n-1} - dj_1\right) c^{j_1+j_2} p^{n-2}_{d,c}(w)^{m/d^{n-2}-d^2 j_1 - dj_2} \\
&\ \ \vdots \\
&= \sum_{j_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{j_N=0}^{\infty} C_{j_1}\left(m/d^n\right)\cdots C_{j_N}\left(m/d^{n-N+1} - d^{N-1}j_1 - \cdots - dj_{N-1}\right) \\
&\qquad\qquad \times c^{j_1+\cdots+j_N} p^{n-N}_{d,c}(w)^{m/d^{n-N}-d^N j_1-\cdots-dj_N}.
\end{aligned}$$

□

Corollary 5.17. $1 \le m \le d^{n+1} - 3$ のとき

$$-m\beta_{d,m} = \sum C_{j_1}\left(m/d^n\right)\cdots C_{j_n}\left(m/d - d^{n-1}j_1 - \cdots - dj_{n-1}\right) c^{j_1+\cdots+j_n}. \tag{20}$$

ここで、和は $d^n j_1 + \cdots + dj_n = m + 1$ をみたす全ての非負整数 $j_1, \cdots, j_n$ にわたってとる。

Proof. (19) において $N = n$ とすれば、$p^0_{d,c}(w) = w$ であることから明らか。 □

5.3 Classification of Coefficients

Theorem 5.18. 任意の次数 $d \ge 2$ において、任意の $m \in \mathbb{N}^+$ に対し

$$\begin{aligned}
&\beta_{d,m} \in \mathbb{Q}^-_{(d)}[c] \setminus \{0\} && m \equiv -1 \pmod d, \\
&\beta_{d,m} = 0 && m \not\equiv -1 \pmod d.
\end{aligned}$$

ここで $\mathbb{Q}^-_{(d)}$ とは、負の d 進有理数の集合を意味する。

Remark. Theorem 5.18 の言わんとしていることは、$m \not\equiv -1 \pmod d$ の場合に係数 $\beta_{d,m}$ は恒等的にゼロとなり、その他の場合は parameter c の d 進負有理数係数多項式 (つまり $\mathbb{Q}^-_{(d)}[c]$ の元) であり、しかも恒等的に (parameter c の値によらず) ゼロになることは無いということである。

Proof. Corollary 5.17 において、すべての係数 $\beta_{d,m}$ は 次式をみたす非負整数 $j_1, \cdots, j_n$ によって記述された。

$$d^n j_1 + \cdots + d j_n = m + 1. \tag{21}$$

この組み合わせが存在しなければ係数 $\beta_{d,m}$ はゼロとなる。

左辺は明らかに d で整除されるから、右辺 $m+1$ も同様。したがって、$m \equiv -1 \pmod{d}$ でなければ係数 $\beta_{d,m}$ はゼロ。

$m \equiv -1 \pmod{d}$ の場合は (21) をみたす $j_1, \cdots, j_n \in \mathbb{N}^+$ が存在するが、どの組み合わせに対しても (20) 式のすべての combination が $\mathbb{Q}^+$ であることを示す。

(21) より

$$d^{n-1} j_1 + \cdots + d j_{n-1} = \frac{m+1}{d} - j_n$$

であるから

$$C_{j_n}\left(\frac{m}{d} - d^{n-1} j_1 - \cdots - d j_{n-1}\right) = C_{j_n}\left(j_n - \frac{1}{d}\right)$$

となり $j_n \in \mathbb{N}^+$ より右辺は非負。同様に

$$d^{n-2} j_1 + \cdots + d j_{n-2} = \frac{m+1}{d^2} - \frac{j_n}{d} - j_{n-1}$$

であるから

$$C_{j_{n-1}}\left(\frac{m}{d^2} - d^{n-2} j_1 - \cdots - d j_{n-2}\right) = C_{j_{n-1}}\left(j_{n-1} + \frac{j_n}{d} - \frac{1}{d^2}\right)$$

であり $j_n, j_{n-1} \in \mathbb{N}^+$ より右辺はやはり非負。以後、同様に繰り返せば、

$$C_{j_i}\left(\frac{m}{d^{n-i+1}} - d^{i-1} j_1 - \cdots - d j_{i-1}\right) = C_{j_i}\left(j_i + \frac{j_{i+1}}{d} + \cdots + \frac{j_n}{d^{n-i}} - \frac{1}{d^{n-i+1}}\right)$$

となるから各 combination

$$C_{j_2}\left(\frac{m}{d^{n-1}} - d j_1\right), \cdots, C_{j_n}\left(\frac{m}{d} - d^{n-1} j_1 - \cdots - d j_{n-1}\right)$$

はともに非負であることがわかる。

j_1 は最大にとっても $d^n j_1 = m + 1$ をみたす必要があるから $j_1 < m/d^n + 1$. したがって $C_{j_1}(m/d^n)$ もやはり非負である。

ゆえに、(20) 式の右辺は恒等的にゼロでないような c の非負有理数係数多項式 $\mathbb{Q}^+[c]$ の元になるから、係数 $\beta_{d,m}$ は恒等的にゼロでない負有理数係数多項式 $\mathbb{Q}^-[c]$ の元である。Lemma 5.14 より $\beta_{d,m} \in \mathbb{Q}_{(d)}[c]$ であることから要求された関係を得る。 □

Theorem 5.18 から得られる結果として次の Corollary がある。

Corollary 5.19 ([Kom]). 正実数を *parameter* とする $z^d + c$ の *filled-in Julia* 集合が連結であれば局所連結。

Proof. filled-in Julia 集合が連結であれば、一意化写像 $\psi_d : \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathrm{D}} \to \widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{K}_{p_{d,c}}$ が存在する。Theorem 5.18 により ψ_d のすべての係数は $\mathbb{Q}^-_{(d)} \cup \{0\}$. これを次のようにおく。

$$\psi_d(z) = z - \sum_{\ell=1}^{\infty} |\beta_{d,d\ell-1}| z^{1-d\ell}. \tag{22}$$

ψ_d の値域上で正則、かつその境界上で単射な写像 g をとってきて、その合成写像 $g \circ \psi_d$ が ψ_d の定義域とその境界上で連続であれば ψ_d もまたその境界上で連続である。この変換写像 g として $z \mapsto 1/z$ をとれば以下の可換図がみたされるから $g \circ \psi_d \circ g^{-1}(z)$ が $\partial\mathrm{D}$ 上で連続であればよい。

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} \setminus \mathrm{D} & \xrightarrow{\psi_d} & \widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{K}_{d,c} \\ {\scriptstyle g(z)=\frac{1}{z}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g(z)=\frac{1}{z}} \\ \overline{\mathrm{D}} & \longrightarrow & \mathcal{R} \end{array}$$

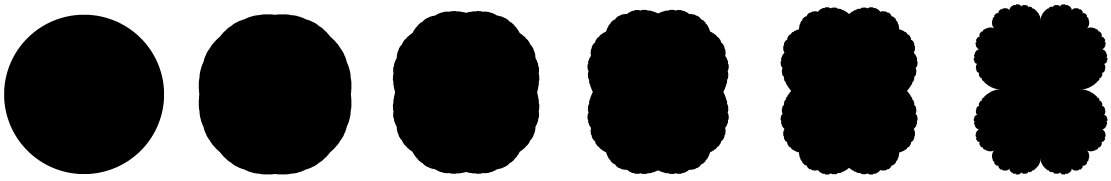
$g \circ \psi_d \circ g^{-1}(z)$ を (22) 式を用いて実際に書き下してみれば、

$$\begin{aligned} g \circ \psi_d \circ g^{-1}(z) = z &+ |\beta_{d,d-1}| z^{d+1} + (|\beta_{d,2d-1}| + |\beta_{d,d-1}|^2) z^{2d+1} \\ &+ (|\beta_{d,3d-1}| + 2|\beta_{d,d-1}||\beta_{d,2d-1}| + |\beta_{d,d-1}|^3) z^{3d+1} + \cdots \end{aligned}$$

となり、すべての係数 $\mathbb{N}^+[|\beta_{d,d-1}|, |\beta_{d,2d-1}|, \cdots]$ は非負であることが確かめられる。ゆえに $g \circ \psi_d \circ g^{-1}(z)$ はその有界性から $\mathrm{D} \cup \partial\mathrm{D}$ において一様収束し、ψ_d もまた $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathrm{D}$ 上で一様収束する。

したがって Carathéodory の定理により $\mathcal{J}_{p_{d,c}}$, $\mathcal{K}_{p_{d,c}}$ は局所連結である。 □

Figure 13, 14 に 2 次および 3 次の写像において Corollary 5.19 から局所連結であることが得られる filled-in Julia 集合の例を図示した。



$c = 0.0$ $c = 0.05$ $c = 0.1$ $c = 0.15$ $c = 0.2$ $c = 0.25$

Figure 13: filled-in Julia sets for $z^2 + c$

$c = 0.0$ $c = 0.1$ $c = 0.2$ $c = 0.3$ $c = 0.35$ $c = 0.385$

Figure 14: filled-in Julia sets for $z^3 + c$

5.4 Some Nonzero Coefficients

本節では Theorem 5.18 と Corollary 5.17 を道具として、$\psi_{d,c}$ の係数 $\beta_{d,m}$ を具体的な式として書き表すことを試みる。

Theorem 5.20. 任意の $m \in \mathbb{N}^+$ に対し

$$d^{\mathrm{ord}_d((m+1)!)}\beta_{d,m} \in \mathbb{Z}^-[c],$$
$$d^{\mathrm{ord}_d((m+1)!-1)}\beta_{d,m} \notin \mathbb{Z}^-[c].$$

Proof. Theorem 5.18 から、ある整数 r をとれば

$$d^r\beta_{d,m} \in \mathbb{Z}^-[c]$$

である。Corollary 5.17 によって $m \le d^{n+1}-3$ をみたす正整数 n をとれば

$$\beta_{d,m} = -\frac{1}{m}\sum C_{j_1}\left(m/d^n\right)\cdots C_{j_n}\left(m/d - d^{n-1}j_1 - \cdots - dj_{n-1}\right)c^{j_1+\cdots+j_n}$$

と書けるから、r として

$$\mathrm{ord}_d(m) + \max\left\{nj_1 + (n-1)j_2 + \cdots + 2j_{n-1} + j_n + \mathrm{ord}_d(j_1!) + \cdots + \mathrm{ord}_d(j_n!)\right\}$$

をとればよい。

$d^nj_1 + \cdots + dj_n = m+1$ の条件から、これを最大にする $j_1, \cdots, j_n$ の組み合わせは j_n を最大にとればよいことがわかる。したがって

$$j_1 = \cdots = j_{n-1} = 0, \quad j_n = \frac{m+1}{d}. \tag{23}$$

また、$m \equiv -1 \pmod d$ であることから $\mathrm{ord}_d(m) = 0$ を得るので

$$r = \frac{m+1}{d} + \mathrm{ord}_d\left(\frac{m+1}{d}!\right).$$

$\mathrm{ord}_d((m+1)!)$ はガウス記号 $[x]$ を用いて次のように記述されることが容易に確かめられる。

$$\mathrm{ord}_d((m+1)!) = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{m+1}{d^i}\right].$$

一方で r は

$$\frac{m+1}{d} + \sum_{i=1}^{n-1}\left[\frac{m+1}{d^{1+i}}\right]$$

と書くことができる。両者が等しいのは明らかであるから r として $\mathrm{ord}_d((m+1)!)$ をとればよいことがわかる。したがって

$$d^{\mathrm{ord}_d((m+1)!)}\beta_{d,m} \in \mathbb{Z}^-[c].$$

逆に、(23) 式をみたす $j_1, \cdots, j_n$ は常に存在するから、これ以上の評価は不可能。なぜならこのとき

$$\begin{aligned}\beta_{d,m} &= -\frac{1}{m} C_{j_n}\left(\frac{m}{d} - d^{n-1}j_1 - \cdots - dj_{n-1}\right)\\ &= -\frac{1}{m} C_{j_n}\left(j_n - \frac{1}{d}\right)\\ &= -\frac{(dj_n - 1)(d(j_n-1)-1)\cdots(d-1)}{md^{j_n} j_n!}.\end{aligned}$$

となるが、分子の因子はすべて d で整除されないから分母は必ず d の $j_n + \mathrm{ord}_d(j_n!)$ 乗になる。したがって

$$d^{\mathrm{ord}_d((m+1)!)-1}\beta_{d,m} \notin \mathbb{Z}^-[c].$$

これで証明は完成した。 □

Theorem 5.21. 任意の $m \equiv -1 \pmod{d}$ に対し、係数 $\beta_{d,m}$ は次式によって記述可能。

$$\beta_{d,m} = \sum_{i=0}^{\ell} \sigma_i c^{\frac{m+1}{d} - i(d-1)}, \quad \ell(d-1) \le \frac{m+1}{d}, \quad \begin{cases}\sigma_0 \in \mathbb{Q}^-_{(d^r)} & r = \mathrm{ord}_d((m+1)!),\\ \sigma_i \in \mathbb{Q}^-_{(d)} & i = 1, \cdots, \ell.\end{cases}$$

Proof. Corollary 5.17 における $j_1, \cdots, j_n$ の条件をみたし、なおかつ $j_1 + \cdots + j_n$ が最大となるようにとれば $j_1 = \cdots = j_{n-1} = 0,\ j_n = (m+1)/d$. このとき

$$\sigma_0 = -\frac{1}{m} C_{\frac{m+1}{d}}\left(\frac{m}{d}\right) \in \mathbb{Q}^-_{(d^r)}, \quad r = \mathrm{ord}_d((m+1)!).$$

今 $j_1, \cdots, j_n$ がそれぞれある値を保持していて、なおかつ Corollary 5.17 にあげられた条件をみたしているものとする。この時点での j_i の総和より小さく、なおかつ可能な最大の総和をもつ $j_1, \cdots, j_n$ の組み合わせを構成するためには、d より大きい値をもつ j_i のうち index が 2 以上のもの (k とおく) から d を引き、j_{k-1} に 1 を足せばよい。k として可能な index が 1 のみであったり、すべての j_i が d より小さければ操作を終了する。操作は一意とは限らないが、k としてどれをとってもこの操作によって $j_1, \cdots, j_n$ の総和は $d-1$ だけ減少することになるから、その間の次数をもつ項を欠くことになる。いま示すべきは $\beta_{d,m}$ が中間の次数を欠くことであって、$j_1, \cdots, j_n$ のすべての組み合わせを尽くす必要は無い。

既に Theorem 5.18 において $\beta_{d,m} \in \mathbb{Q}^-_{(d)}[c]$ であることが示されているから、提示された式によって係数 $\beta_{d,m}$ が記述可能である。 □

Theorem 5.18 より、$m \equiv -1 \pmod{d}$ であれば係数 $\beta_{d,m}$ は非ゼロ。このことと Corollary 5.17 から直接次を得る。

Corollary 5.22. $m \le d^2 - 3$ をみたす整数 $m \equiv -1 \pmod{d}$ に対し

$$\beta_{d,m} = -\frac{c^{\frac{m+1}{d}}}{m} C_{\frac{m+1}{d}}\left(\frac{m}{d}\right). \tag{24}$$

Proof. Corollary 5.17 において $n = 1$ とすれば m に課せられる条件は $m \leq d^2 - 3$. このとき係数 $\beta_{d,m}$ は

$$\beta_{d,m} = -\frac{1}{m} \sum C_j \left(m/d\right) c^j$$

となり、和は $dj = m + 1$ を満たすすべての正整数 j にわたるから $j = \dfrac{m+1}{d}$. □

Example ($d = 2, m = 1$). $d = 2$ のとき $m \leq 2^2 - 3 = 1$ であり、$m = 1$ にとれば $m \equiv -1 \pmod 2$ をみたす。このとき

$$\begin{aligned}
\beta_{2,1} &= -\frac{c^{\frac{1+1}{2}}}{1} C_{\frac{1+1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right) \\
&= -c\, C_1 \left(\frac{1}{2}\right) \\
&= -\frac{c}{2}.
\end{aligned}$$

Example ($d = 3, m = 5$). $d = 3$ のとき $m \leq 3^2 - 3 = 6$ であり、$m = 5$ にとれば $m \equiv -1 \pmod 3$ はみたされる。このとき

$$\begin{aligned}
\beta_{3,5} &= -\frac{c^{\frac{5+1}{3}}}{5} C_{\frac{5+1}{3}} \left(\frac{5}{3}\right) \\
&= -\frac{c^2}{5} C_2 \left(\frac{5}{3}\right) \\
&= -\frac{c^2}{5} \cdot \frac{5/3 \cdot 2/3}{2!} \\
&= -\frac{c^2}{5} \cdot \frac{5 \cdot 2}{3^2 \cdot 2} \\
&= -\frac{c^2}{3^2}.
\end{aligned}$$

Corollary 5.23. 任意の $d \geq 2$ に対し、最初の非ゼロ係数は $m = d - 1$ のとき

$$\beta_{d,m} = -\frac{1}{d}.$$

Proof. 最初に非ゼロとなる可能性があるのは、その index m が $d-1$ のときである。$d \geq 2$ のとき、$m = d - 1$ は Theorem 5.22 の条件をみたすから (24) 式に代入して整理すれば要求された式を得る。 □

References

[BFH93] B. Bielefeld, Y. Fisher, and F. v. Haeseler, *Computing the laurent series of the map* $\Psi : \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{D} \to \widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{M}$, Adv. in Math. **14** (1993), 25–38.

[Bla84] P. Blanchard, *Complex analytic dynamics on the Riemann sphere*, Bull. Amer. Math. Soc. **11** (1984), no. 1, 85–141.

[Bra89] B. Branner, *The Mandelbrot set*, Chaos and Fractals, Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, vol. 39, Amer. Math. Soc., 1989, pp. 75–105.

[BS] L. Blum and S. Smale, *The Gödel incompleteness theorem and decidability over a ring*, Proceedings of the SMALEFEST: From Topology to Computation.

[BSS89] L. Blum, M. Shub, and S. Smale, *On a theory of computation and complexity over the real numbers: NP-completeness, recursive functions and universal machines*, Bull. Amer. Math. Soc. **21** (1989), 1–46.

[DH82] A. Douady and J. Hubbard, *Itération des polynômes quadratiques complexes*, C. R. Acad. Sci. Paris **294** (1982), 123–126.

[ES90] J. Ewing and G. Schober, *On the coefficients of the mapping to the exterior of the Mandelbrot set*, Michigan Math. J. **37** (1990), 315–320.

[ES92] J. Ewing and G. Schober, *The area of the Mandelbrot set*, Numerische Mathematik **61** (1992), 59–72.

[Fis88] Y. Fisher, *Exploring the Mandelbrot set*, The Sience of Fractal Images (H. O. Peitgen and D. Saupe, eds.), Springer-Verlag, 1988, pp. 287–296.

[Jun85] I. Jungreis, *The uniformization of the complement of the Mandelbrot set*, Duke Math. J. **52** (1985), no. 4, 935–938.

[Kom] Y. Komori, private communication.

[Lau93] E. Lau, *Symmetrien in der komplexen dynamik*, Preprint, April 1993.

[Lev88] G. M. Levin, *On the arithmetic properties of a certain sequence of polynomials*, Russian Math. Surveys **43** (1988), 245–246.

[LS96] E. Lau and D. Schleicher, *Symmetries of fractals revisited*, The Mathematical Intelligencer **18** (1996), no. 1, 45–51.

[LvS95] G. Levin and S. van Strien, *Local connectivity of the Julia set of real polynomials*, Preprint, IMS Stony Brook, #5 April 1995.

[Mil89] J. Milnor, *Self-similarity and hairiness in the Mandelbrot set*, Computers in Geometry and Topology (M. Tangora, ed.), Lec. Notes Pure Appl. Math., vol. 114, Dekker, New York, 1989, pp. 211–257.

[Mil90] J. Milnor, *Dynamics in one complex variable*, Preprint, IMS Stony Brook, #5 April 1990.

[Mil92] J. Milnor, *Hyperbolic components in spaces of polynomial maps*, Preprint, IMS Stony Brook, #3 February 1992.

[Pei88] H. O. Peitgen, *Fantastic deterministic fractals*, The Sience of Fractal Images (H. O. Peitgen and D. Saupe, eds.), Springer-Verlag, 1988, pp. 169–207.

[PR86] H. O. Peitgen and P. Richter, *The beauty of fractals*, Springer-Verlag, 1986.

[Shi91] M. Shishikura, *The hausdorff dimension of the boundary of the Mandelbrot set and Julia sets*, Preprint, IMS Stony Brook, #7 July 1991.

[Yam] O. Yamashita, *On the coefficients of the map* $\Psi : \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{D} \to \widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{M}$, to appear.

A data

Table 7: Coefficients of Ψ_3

index	denominator	numerator	denominator	index
1	1	-1	-1479509710849920871183350918905711598998111962876560590625698839322 9	148	199
3	∞	0	-754354139111917662125978077738767261579935416863080128453046774473 4	147	197
5	4	1	76565411151709	35	195
7	5	-26	52792296384362682362525993835658774036060605485734335264354229894	143	193
9	∞	0	-37019662759390394892068794476028986473665972399366254737636291368	142	191
11	8	77	0	∞	189
13	9	103	29778836722054778430063599228149698896309036938773727560720558 31	139	187
15	3	-1	-13338460142155160238357481118475896078519328111776435840213828	138	185
17	13	24377	-11766165873182	33	183
19	14	30074	-58393136969784936204106978107441725006736187895008613424171076	135	181
21	∞	0	-29693676660490524462243435382836648822651664752088726439513 69	134	179
23	17	-2278234	2839984757690	32	177
25	18	-8075591	-10680456246138952016441118745380803409632376739190042056985 3	130	175
27	∞	0	369801963811583029905768607321178927013462849857832504501 4	129	173
29	21	19764304	0	∞	171
31	22	-208407602	29063429954671791560341878846734122501086901659700036642 69	126	169
33	6	-8	-876791161621595744125370217056266857732578023051657171465	125	167
35	26	15167294324	16993958231	29	165
37	27	19170454771	60297426535633552980564259421536630685850742690878480 83	122	163
39	7	-7	96968985266712359265524650632311469059715307044041231 66	121	161
41	30	-1419143905408	-260760240914	29	159
43	31	5759323908557	-5103769310322192847607536534231871284998239842815914	115	157
45	∞	0	-5463913072955537488745725405748048313413466593478529	114	155
47	34	-45093584185349	0	∞	153
49	35	-214001362136236	-18729553187369449147237101664841606934409400820785 0	111	151
51	9	-118	631930088959159435430334413973674678227395788346 40	110	149
53	40	24105616535263279	1618301132	26	147
55	41	2873237453374558	-70366744522147392180491053139085096157002916590 1	107	145
57	10	-107	-26884437161980994164739748983644025967336596883 8	106	143
59	44	-2754287162390038604	605162744	24	141
61	45	12060768336468170963	10898866387682813540673054609372323692748844 56	102	139
63	∞	0	-15056139351490632853473454061310899519269720 06	101	137
65	48	-103674084851183325046	0	∞	135
67	49	-435279072455963669734	10082644674428253209206292193511189165405735 4	98	133
69	11	998	-16990887603730055434607943047489062152835859	97	131
71	53	-39481831059042439209586	-329085755	23	129
73	54	-67161545990553745393745	-671911497165875514874271995151691923110247	94	127
75	13	-1402	-29603385517693545570596323763163575910506 36	93	125
77	57	-52898365662041174884554 70	89168194	22	123
79	58	-47934173597284442601364690	59384070387267532507630255870348807389 8	89	121
81	∞	0	-14734686256600409178604238246028803366 90	88	119
83	61	12286575658279500049054231 9	0	∞	117
85	62	-19786142312841510172853982 7	10135264769315117236288951502663087643 5	85	115
87	16	-231830	-84609527578633369821401287632991698 22	84	113
89	66	85899687943723790574617490011	-8401048	20	111
91	67	96141277336316648493730819613	21969151441186246696780222399552575 1	81	109
93	16	-23842	24591764953224163933692092853235677 8	80	107
95	70	-54916511928330072548776672668 76	-2909485	19	105
97	71	21672884836628165013398037053845	-38448195280859201122795529000184 05	75	103
99	∞	0	-14556670449334062556746937132317 8	74	101

Table 8: Coefficients of Ψ_4

index	numerator	denominator
2	-1	1
5	-2	3
8	0	∞
11	14	6
14	-62	5
17	-985	8
20	0	∞
23	55254	12
26	618	9
29	-6583863	14
32	0	∞
35	55610435	17
38	41973	12
41	1102448110	20
44	-14	5
47	1237178274662	24
50	48740634	17
53	5049980195029	26
56	0	∞
59	-2457139994346471	29
62	-10813984545	20
65	-44659971778303326	32
68	0	∞
71	444491234909697855	35
74	-1363643872991	24
77	-490588426697840906470	38
80	0	∞
83	5072286738405377671926	41
86	55960912541754	28
89	-223490291350030313428073	43
92	-1225	9
95	16355592825850593747693888 6	48
98	105152907647492218	33
101	71941605360559467268069511 7	50
104	-33	7
107	-28904030533427645248539448 1763	53
110	16746689544782749851	36
113	52175982345430187651127490897 54	56
116	0	∞
119	-53334604587701387066442659452 0475	59
122	-3279376271688009026309	40
125	-62234433731522700985169265527 540690	62
128	0	∞
131	28197645144179616987076119495276 0970	65
134	-22411162711973910060569 0	44
137	-37759134686658541630865710388843 749535	67
140	-514710	14
143	48165125549053846131633725929477 36197559	71
146	42291335724981540217426953	48
149	-10513767268885851966052589574830 8317719294	74
152	-1265	10
155	-33830988107508249429487465342641 989605920230	77
158	36134651143183116008466795030	52
161	18298177226488374535492957943851 0756498597781	79
164	-1185665	16
167	-91418883965955335661941247847149 486401186112050	83
170	-631541592535856480175754058 2414	56
173	39440376673203551695683391444659284 38580061279189	85
176	0	∞
179	-46555390666989293095678929825539842 508517463314709	88
182	-27631300617164492266698588 4160403	59
185	-57964263680787687127755355729018890036421316795346 74	91
188	-94403959	18
191	204256044875989671096537117391904379182319660302809 2614	96
194	20831443518942385951552960233100090	65
197	-37219071380473867689100714540287907047606855889538 112067	98
200	-41225	13

Table 9: Coefficients of Ψ_5

index	numerator	denominator
3	-1	1
7	-1	2
11	-1	3
15	0	∞
19	21	6
23	-3047	7
27	-6063	8
31	-9089	9
35	0	∞
39	318758	12
43	1422733	13
47	-103436922	14
51	-119978523	15
55	0	∞
59	4694241331	18
63	22782984892	19
67	69330083763	20
71	-4781958939474	21
75	0	∞
79	73412034304794	24
83	358222933830256	25
87	1128761472839611	26
91	2238272777169391	27
95	-21	5
99	8058264075137439499	31
103	31415782785419353682	32
107	94016496290094752618	33
111	186375240897137735049	34
115	0	∞
119	-346929038025018152372441	37
123	-198539820334508619084936	38
127	-39541928741767804922907	39
131	-5418199905168016074094419	40
135	0	∞
139	12926464391724264986600532	43
143	-18285792407371891490477225936	44
147	-11413766776961331786737522747	45
151	-15394637403411018019292188073	46
155	0	∞
159	58420653208235724465846775153	49
163	26649275865988519039396306027226	50
167	-98114700072747992724355683328	51
171	-68848262830526165175655798346	52
175	0	∞
179	14451619279954141100451951102280	55
183	70775881225962070769347013705860	56
187	21887409380712296450769211263352	57
191	-56125743236875810109232806053392	58
195	-24399	10
199	19496268873948521693639319557328843	62
203	82617714239203496349190510101515519	63
207	25375991308413445467965247405448449	64
211	50412386902959786257646711716902931	65
215	-62491	11
219	-69987690656878948564725525058698013	68
223	27370886206237000148807704843452450	69
227	61215130413533871878446177533427299	70
231	11311783897512011802934654527022437	71
235	0	∞
239	-56123020839673762322657409893608273	74
243	-45195784102851903531702327278447924	75
247	-22923860859791899961377111035672593	76
251	-23589739009369981007645805052399287	77
255	0	∞
259	36805841551088783852994085498143398	80
263	-28477322925899037196976762937466215	81
267	-26346642367704901965092272532173604	82

Table 10: Coefficients of Ψ_6

index	numerator	denominator
4	-1	1
9	-9	3
14	-16	4
19	-819	7
24	0	∞
29	38709	10
34	-274304	9
39	-6372509031	15
44	-78598144	13
49	-193153366341	18
54	0	∞
59	82291201585515	22
64	64730955776	18
69	-349508214591396777	25
74	-102209307410432	21
79	-2034099194461667032239	31
84	0	∞
89	167687479142865128469951	34
94	659262864413949952	27
99	17688495245431602209272 5105	38
104	-1659766444224457736192	30
109	-12104587384315971591013 5243951	41
114	0	∞
119	34303786350081671554458959899 9719	46
124	107668270280036069251481 6	35
129	650816072767332956022090523682 08365	49
134	37641799672500819820260884 48	40
139	-907381104304217545437120255058459349535	53
144	0	∞
149	21283092299824817558323398634929992418621	56
154	64740863254378668797565203382272	45
159	50995627133513717795117805888319366580624773 77	63
164	64536658065378537665302541495173 12	48
169	26271461854086438543041317129046329583643319 5111	66
174	-38709	9
179	24151694631378491948999593478748567192042293319832 53	70
184	73722745367121072153398046603096778342 4	54
189	32386822218527627754829733218150725282033233574072 1965	73
194	66998928721694510218074205543425701314 56	57
199	59099791276350790423410804202569719695541654336292138 5757	78
204	0	∞
209	-31510970065450357764896673631168669303099999054538550919614 81	81
214	-58901183453185808069866938877018261654108897 28	62
219	-23336933851236021082453394156102764430048037739490980369567712 97	85
224	-15940939375031118555810904525592676441578044129 28	66
229	-59473975447793950749123231421745200644617170530850406948879739093	88
234	0	∞
239	607923111157711775584461411844322593032962590860680242320194778244479	94
244	-38620110502453699505944179923977646608864945991843840	71
249	-79445083538525943348122984264205680934705983236642155843525846626855140 47	97
254	-43198918511141176384523322159158971694657583703077683 20	74
259	-14639920587014079007652117902365647262326121623971134625777553775337533427397481	101
264	0	∞
269	11156259002181037739326282363404942250019506354409370399118131303006416332544 7	104
274	14511953828854219826996555464627925293490569740496198539673 6	81
279	-10716262840286582574577519690764906717664366143566329057579953354664026922517038203	109
284	-49164276365412013898309095640512953393363374878237876905259827 2	84
289	-75453061278273221329132939605364589544144275102864639674263782740651546933450522905	112
294	0	∞
299	37371458239686426193383419715071231887875299985302056543555875880009372503047633113221 9	116

Table 11: Coefficients of Ψ_7

index	numerator	denominator
5	-1	1
11	-2	2
17	-5	3
23	-12	4
29	-22	5
35	0	∞
41	1989	8
47	-39687942	11
53	-7751369192	14
59	-1422706650743	17
65	-223045788665378	20
71	-25053941652628210	23
77	0	∞
83	22224312174066402939	27
89	8506284204445232741165	30
95	-71785749709318174169575691	33
101	-11816569058145133758421510047	36
107	-19326246374157427517621532142 23	39
113	-23215384687919351379593771966 6300	42
119	0	∞
125	33931816808664661718440234647515508	45
131	13905263006711019696036990274994877298	48
137	39641255319971358706817299539774671248 50	51
143	-24966550266855338417708869043271632598638420	54
149	-28897469090106637186479506779598829502072356 76	57
155	-47649635097916578879122355457587754691824277003	59
161	0	∞
167	51093170974321652986777128601751187276270805136797	63
173	21765504323156121692255759295448124074118786380298538	66
179	64655314500681751612501189128769155401757023921088770 94	69
185	15462083275235081960674716023375878173130630494992758234 05	72
191	-98322710649714412330959767832030905457924279573490449837 18192	75
197	-58625449777275943923933801294867236004334408633356462326756 6881	78
203	0	∞

Table 12: Upper bounds of area of $\mathcal{M}_d$

$\mathcal{M}_3$	2.1622
$\mathcal{M}_4$	2.3229
$\mathcal{M}_5$	2.4261
$\mathcal{M}_6$	2.5036
$\mathcal{M}_7$	2.6090