数 [1]

以下の問いに答えよ．

(1) $(0,\infty)$ 上の関数 $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$ に対して，$f'(x)$ および $\lim_{x\to+0} f'(x)$ を求めよ．

(2) $\int \sqrt{e^x-1}\,dx$ を求めよ．

数 [2]

以下の問いに答えよ．

(1) 2 次元複素列ベクトル x から行列 $\bar{x}\,{}^t x$ を作ると，これは正則でないことを示せ．ただし，${}^t x$ は x の転置ベクトルである．

(2) a,b,c を実数とする．行列

$$A=\begin{pmatrix} 1+c & a-ib \\ a+ib & 1-c \end{pmatrix}$$

に対して，ある列ベクトル x が存在して $A=\bar{x}\,{}^t x$ となるための必要十分条件を求めよ．

数 [3]

自然数の集合 $\{m_1,...,m_n\}$ に値をとる確率変数 X に対し，$p_i=P(X=m_i)>0,\ i=1,...,n,$ とする．

(1) 確率分布 $(q_1,...,q_n)$ $(q_i\neq 0)$ に対し，次の不等式を示せ．

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 \frac{p_i}{q_i} \geq 0.$$

(2) $m_i=\lceil -\log_2 p_i \rceil,\ i=1,...,n,$（ $\lceil x \rceil$ は $k\geq x$ なる最小の自然数 k ）のとき，

$$\sum_{i=1}^{n} 2^{-m_i} \leq 1, \qquad E[X] \leq -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 p_i + 1$$

を示せ．ただし，$E[X]$ は X の平均値．

(3) $m_1,...,m_n$ が $\sum_{i=1}^{n} 2^{-m_i}\leq 1$ をみたすとき，次の不等式を示せ．

$$E[X] \geq -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 p_i.$$

数 [4]

実微分可能関数 $x(t)$ と $y(t)$ が微分方程式

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x - 4e^{-t}y, \\ \frac{dy}{dt} &= e^{t}x + 4y \end{aligned}$$

を満足するとき，以下の問いに答えよ．

(1) $z = px + qy$ と $w = qy$ が微分方程式

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= -4w, \\ \frac{dw}{dt} &= z. \end{aligned}$$

を満足するように実微分可能関数 $p(t)$， $q(t)$ を定めよ．

(2) $x(0) = 2$，$y(0) = 0$ のとき $x(t)$ と $y(t)$ を求めよ．

数 [5]

二つの自然数を要素とするような無限個の集合たちからなる族 $\mathcal{F}$ に対し, $\mathcal{F}$ の無限部分族 $\mathcal{G}$ で, 次の (1), (2) いずれかの性質を持つものがとれることを示せ:

(1) 任意の異なる A, $B \in \mathcal{G}$ について $A \cap B = \emptyset$ である,

(2) 自然数 a が存在して, 任意の異なる A, $B \in \mathcal{G}$ について $A \cap B = \{a\}$ である.

数 [6]

φ をオイラー関数とする．すなわち，自然数 m に対して，1 以上 m 以下の自然数で m と互いに素となる自然数の個数を $\varphi(m)$ で表わす．このとき，互いに素な自然数 m, n に対して，

$$\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$$

が成立することを以下を証明することにより示せ．

(1) 任意の整数 a, b に対して，以下の連立合同式の整数解が法 mn で一意的に定まる．

$$\begin{cases} x \equiv a \mod m \\ x \equiv b \mod n \end{cases}$$

(2) m と互いに素な整数 a および n と互いに素な整数 b に対して，上の整数解 x を対応させると，この対応は $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^{\times} \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\times}$ から $(\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z})^{\times}$ への全単射となる．

(3) 互いに素な自然数 m, n に対して，

$$\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$$

が成立する．

数［ 7 ］

情報システムの選定における評価基準が，機能性，操作性，経済性，信頼性の４項目であり，その代替案がＡ，Ｂ，Ｃ，Ｄの４種類あったとする．いま，それらの階層構造が 図１であったとき，階層分析法にしたがって，代替案を最適な順に選定する方法を次の用語を全て用いて述べよ．

”一対比較，重要度（重み），重要性の尺度，固有値，固有ベクトル，整合度，正規化”

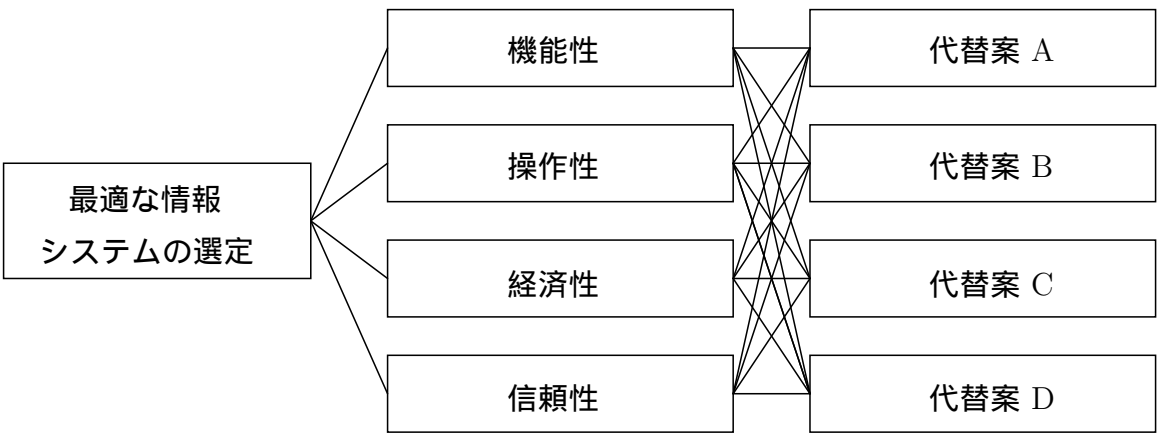

図１　情報システム選定の階層構造