[1] A を (m,n) 型の実行列, B を $(m-n,m)$ 型の実行列とする $(m>n)$. いま, $\mathrm{rank}(A)=n$ かつ $\mathrm{rank}(B)=m-n$ であって, $BA=O$ であるならば, (m,m) 型行列 $\begin{pmatrix} {}^tA \\ B \end{pmatrix}$ は正則であること (すなわち, m 個の行ベクトルは線形独立であること) を示せ. ただし, ${}^tA$ は 行列 A の転置行列を意味する.

[2] 次の 2 重積分の値を求めよ.

$$\iint_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\,dx\,dy \qquad\qquad D:\ x^2+y^2\leq 1$$

[3] 領域 $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x<y\}$ 上で定義された関数 f で, 次のような性質を持つものを作れ.

1. f はつねに整数を値としてとる,
2. $x<y<z$ がいずれも実数のとき, $f(x,y)$, $f(x,z)$, $f(y,z)$ の値が 3 つとも同じになることはない.

[4] p を素数として, 次の行列 A を考える.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1^2 & \cdots & 1^{p-1} \\ 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^{p-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & p & p^2 & \cdots & p^{p-1} \end{pmatrix}$$

このとき以下の問いに答えよ.

1. $\det A$ と p は互いに素であることを示せ.
2. 自然数 k $(1\leq k\leq p)$ に対して, A の (k,p) 余因子の法 p のもとでの剰余は k に依らず一定であることを示せ.
   ただし, $\prod_{i}^{p-1} i\equiv -1 \bmod p$ を利用してよい.
3. p が奇素数のとき, 法 p のもとでの剰余環 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 上の多項式 $f(X)=a_0+a_1X\cdots+a_{p-1}X^{p-1}$ が $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 上の全射を与えるならば, $a_{p-1}\equiv 0 \bmod p$ であることを示せ.

[5] 以下の問いに答えよ.

1. 3 階線型常微分方程式

$$x^3y''' + 2x^2y'' - 6xy' = 0$$

の一般解を求めよ.

2. 上の微分方程式の解で, 条件

$$y(1) = 0, \quad y'(1) = 1, \quad \lim_{x\to\infty} y(x) = \text{有限}$$

を満たすものを求めよ.

3. 上の (2) の解の概形を xy 平面に描け.

[6] X を有限集合 $\{x_1, \ldots, x_n\}$ に値をもつ確率変数とし, Y を有限集合 $\{y_1, \ldots, y_m\}$ に値をもつ確率変数とする．X, Y に関する結合確率分布, 条件付確率分布, 周辺確率分布をそれぞれ,

$$\begin{array}{ll} P(X = x_i, Y = y_j) = p(i, j), & \\ P(X = x_i) = p(i) > 0, & P(Y = y_j) = q(j) > 0, \\ P(X = x_i | Y = y_j) = p(i|j) > 0, & P(Y = y_j | X = x_i) = q(j|i) > 0, \end{array}$$

とし, I_1, I_2 を

$$\begin{aligned} I_1 &= \sum_{i=1}^{n} p(i) \sum_{j=1}^{m} q(j|i) \log \frac{q(j|i)}{q(j)} \\ I_2 &= \sum_{j=1}^{m} q(j) \sum_{i=1}^{n} p(i|j) \log p(i|j) - \sum_{i=1}^{n} p(i) \log p(i) \end{aligned}$$

と定義する．このとき,

$$0 \le I_1 = I_2 \le \min\{\log m, \log n\}$$

が成り立つことを示せ.