問題　1　（微分積分）

(1) $\displaystyle\int_x^\infty te^{-t^2}dt$ を求めよ.

(2) f, g を

$$f(x) = \int_x^\infty e^{-t^2}dt, \qquad g(x) = \frac{1}{2x}e^{-x^2}$$

で定義される $(0, \infty)$ 上の関数とするとき，$f(x) \leq g(x), x > 0,$ であることを示せ.

(3) 次の極限の値を求めよ.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

問題　2　（線形代数）

(1) ３次元実線形空間 $\mathbf{R^3}$ から部分空間 $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \quad 3x + 4y - z = 0 \right\}$ への正射影を表す行列 A を求めよ.

(2) A の固有値および固有ベクトルを求めよ.

(3) A を対角化せよ.

(4) n 次元実線形空間から m 次元部分空間への正射影を表す行列の固有多項式を求めよ.

（定義．A が部分空間 W への正射影を表す行列

$\leftrightarrow$　すべての $\vec{x}$ に対して，(i)$A\vec{x} \in W$ (ii) $(\vec{x} - A\vec{x}) \perp A\vec{x}$)

問題　3　（数値解析）

1010 の３乗根を求めるため，$f(x) = (1+x)^{1/3}$ $(|x| < 1)$ とし，$f(x)$ の n 次マクローリン展開を

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

とする.

(1) ３次マクローリン展開 $f_3(x)$ を求めよ.

(2) $x > 0$ のとき $f_2(x) < f(x) < f_3(x)$ であることを示せ.

(3) 1010 の３乗根を，小数点以下４桁まで正確に求める計算法を述べ，近似値を実際に求めよ.

問題　4　（離散数学 A）

次の **I,II** のうち，いずれか１つを選択して答えよ．

I. 自然数 n に対して，

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & (n = 1), \\ (-1)^l & (n \text{ は異なる } l \text{ 個の素数の積}), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

により関数 $\mu(n)$ を定義する．

1. 任意の自然数 n に対して，

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & (n = 1), \\ 0 & (n > 1) \end{cases}$$

を示せ．ただし，$\sum_{d|n}$ は n の全ての正の約数 d に関する和である．

2. 任意の $\mathbf{N}$ 上の関数 f に対して，$g(n) = \sum_{d|n} f(d)$ とすれば，任意の自然数 n に対して，

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) g\left(\frac{n}{d}\right)$$

であることを示せ．

3. Euler 関数 φ に対して，$\sum_{d|n} \varphi(d) = n$ が成立することを利用して，

$$\varphi(n) = n \prod_{p|n} (1 - \frac{1}{p})$$

を証明せよ．ただし，$\prod_{p|n}$ は n の全ての正の素因数 p に関する積である．

II. p を素数，$N_p = \{1, 2, \ldots, p-1\}$ とする．N_p 上の 2 項演算 $\bullet$ を，$x \bullet y = z$ (ここで z は $x \times y$ を p で割った余り) により定める．このとき，$\langle N_p, \bullet \rangle$ は 1 を単位元として持つ可換群である．すなわち，以下の性質が成り立つ．

(A) 任意の $x, y, z \in N_p$ について，$(x \bullet y) \bullet z = x \bullet (y \bullet z)$

(E) 任意の $x \in N_p$ について，$x \bullet 1 = 1 \bullet x = x$

(I) 任意の $x \in N_p$ について，$x \bullet y = y \bullet x = 1$ を満たす $y \in N_p$ が一意に存在する
(このとき，y を x の逆元と呼び，これを $\overline{x}$ で記す)

(C) 任意の $x, y \in N_p$ について，$x \bullet y = y \bullet x$

以下では，i 個の x を $\bullet$ で結んだ $\overbrace{((\cdots(x \bullet x) \bullet \cdots) \bullet x) \bullet x}^{i}$ を x^i と表す．また，$((\cdots(1 \bullet 2) \bullet \cdots) \bullet x - 1) \bullet x$ を $x!$ と表す．

このとき，以下の問いに答えよ．ただし，解答に性質 (A),(E),(I),(C) や，前問の結果などを用いた場合には，それらを明記すること．

(1) $p = 7$ とするとき，以下の各々の値を求めよ．

(i) $3 \bullet 5$　　(ii) 2^6　　(iii) $\overline{6}$

(2) 次が成立することを示せ．

任意の $x, y, z \in N_p$ について，$x \bullet y = x \bullet z$ ならば $y = z$.

(3) 任意の正の整数 j について次が成立することを帰納法により示せ．

$$j \in N_p \text{ ならば } \forall x \in N_p. (\cdots((x \bullet 1) \bullet (x \bullet 2)) \bullet \cdots) \bullet (x \bullet j) = j! \bullet x^j$$

(4) (2) より，$\{x \bullet 1, x \bullet 2, \ldots, x \bullet (p-1)\} = \{1, 2, \ldots, p-1\}$ が成立する．この両辺の集合のそれぞれについて全ての要素を $\bullet$ で結んで得られる式を等号で結び，性質 (A) と (C) を繰り返し適用することにより

$$(\cdots((x \bullet 1) \bullet (x \bullet 2)) \bullet \cdots) \bullet (x \bullet (p-1)) = (p-1)! \qquad \cdots\cdots (\alpha)$$

が導ける．(α) を利用して，任意の $x \in N_p$ に対して，$x^{p-1} = 1$ が成立することを示せ．

問題　5　（離散数学 B）

単純無向グラフ $G = (V, E)$ において、頂点部分集合 $S \subseteq V$ の任意の（異なる）2 頂点間に辺が存在するとき、S は G の**クリーク**と呼ばれ、逆にどの 2 頂点間にも辺が存在しないなら、**独立集合**と呼ばれる。V 自身がクリークであるとき、G を**完全グラフ**という。

任意整数 k に対し、十分に多くの頂点をもつグラフには、必ず大きさ k 以上のクリークもしくは大きさ k 以上の独立集合が存在することが知られている。そこで次のように関数 R を与える：

$$R(k) = \min \left\{ n \,\middle|\, \begin{array}{l} n \text{ 頂点からなるグラフには、必ず大きさ } k \text{ 以上のクリークもしくは独} \\ \text{立集合が存在する} \end{array} \right\}$$

例えば、$R(2) = 2$ である。

1. $R(3) > 5$ であることを示せ。
2. n 頂点をもつ完全グラフから、各辺を独立に $1/2$ の確率で取り除いてグラフ G をつくる。頂点部分集合 S について、「S は G のクリークもしくは独立集合である」という事象を、A_S で表す。確率 $P(A_S)$ を求めよ。
3. 事象 $B = \bigcap_{S:|S|=k} \overline{A}_S$ について、

$$ {}_nC_k < 2^{{}_kC_2 - 1} \tag{1}$$

　が成立するとき、$P(B) > 0$ となることを示せ。

4. 式 (1) が成立するとき、$R(k) > n$ となることを説明せよ。

問題　6　（オートマトン理論）

アルファベットを $\{a, b\}$ とする言語を考える．言語 L を aaa または aba を含む全ての文字列の集合とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) L を受理する非決定性オートマトンのうち、状態数が 4 以下のものを一つ図示せよ。

(2) L を受理する決定性オートマトンのうち、状態数が 5 以下のものを一つ図示せよ。

問題　7　（数理論理学）

次の **I,II** のうち，いずれか１つを選択して答えよ．

I. $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$ とする．すべての $n \in \mathbf{N}$ に対し，集合 A_n と集合 B_n が与えられていて $|A_n| < |B_n|$ をみたしているとする．ただし，$|A_n|$ は A_n の濃度である．$\Pi_{n\in\mathbf{N}}B_n$ は次の条件を満たす関数 f すべてから成る集合とする：

関数 f の定義域は $\mathbf{N}$ で，すべての $n \in \mathbf{N}$ に対し $f(n) \in B_n$

このとき，$|\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n| < |\Pi_{n\in\mathbf{N}}B_n|$ を証明せよ．

II. 本問では，次のような論理結合子および等号を用いることとする．

連言	選言	否定	含意
(conjunction)	(disjunction)	(negation)	(implication)
$\wedge$	$\vee$	$\neg$	$\rightarrow$

全称限量子	存在限量子	等号
(universal quantifier)	(existential quantifier)	(equality symbol)
$\forall x$	$\exists x$	$=$

結合の強さは，限量子，否定，連言，選言，含意の順とする．

$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ とする．$\mathbf{N}$ の要素の有限列の集合を $\mathbf{N}^*$ で表す．

頂点 (vertex) が $\mathbf{N}$ の要素であるような無向グラフ (undirected graph)G が与えられたとき，2 引数関数記号 $\circ$，1 引数述語記号 V, P，2 引数述語記号 E の $\mathbf{N}^*$ 上での解釈 $G[\![\circ]\!], G[\![V]\!], G[\![E]\!], G[\![P]\!]$ を，G に基づいて次のように定める．任意の $i_1, \ldots, i_m \in \mathbf{N}$ に対して，

- $G[\![\circ]\!](i_1 \cdots i_l,\ i_{l+1} \cdots i_m) = i_1 \cdots i_l i_{l+1} \cdots i_m$ とする．ただし，$0 \leq l \leq m$ とする．
- $G[\![V]\!](i_1) = \mathbf{true}$ のときかつそのときに限り，i_1 は G の頂点である．
- $G[\![E]\!](i_1, i_2) = \mathbf{true}$ のときかつそのときに限り，G において頂点 i_1 と頂点 i_2 を結ぶ辺 (edge) がある．
- $G[\![P]\!](i_1 i_2 \cdots i_m) = \mathbf{true}$ のときかつそのときに限り，$m > 1$ かつ各々の $1 \leq k < m$ に対して G に頂点 i_k と頂点 i_{k+1} を結ぶ辺があり，かつ，$i_1, i_2, \ldots, i_m$ はすべて異なる．

関数記号 $\circ$，述語記号 V, E, P から構成される一階述語論理式 (first order predicate formula)（以下では単に論理式という）に関する以下の問に答えよ．

(1) 次の論理式を冠頭標準形 (prenex normal form) に変換せよ．

(a) $\forall i \forall j(V(i) \wedge V(j) \wedge \neg(i = j) \rightarrow \exists x P((i \circ x) \circ j))$

(b) $\forall i(V(i) \rightarrow \forall j(V(j) \rightarrow (E(i, j) \rightarrow E(j, i))))$

(c) $\forall i \forall j(V(i) \wedge V(j) \wedge \neg(i = j) \wedge \forall x \forall y(P((i \circ x) \circ j) \wedge P((i \circ y) \circ j) \rightarrow x = y))$

(2) (1) の各々の論理式が図１の無向グラフ G_1 に対する解釈の下で成り立つか否かを答えよ．

(3) (1) の各々の論理式が図１の無向グラフ G_2 に対する解釈の下で成り立つか否かを答えよ．

(4) G_1 に対する解釈の下で，次の論理式が成り立つような G_1 の頂点 a を列挙せよ．

$$V(a) \land \exists i \exists j (V(i) \land V(j) \land \neg(a = i) \land \neg(a = j) \land \neg(i = j) \land$$
$$(\forall x (P((i \circ x) \circ j) \to \exists x_1 \exists x_2 (x = (x_1 \circ a) \circ x_2))))$$

(5) G_2 に対する解釈の下で，次の論理式が成り立つような G_2 の頂点 a を列挙せよ．

$$V(a) \land \forall i \forall j (E(a, i) \land E(a, j) \to i = j))$$

(6) 次のことを表す論理式を書け．

(a) G は木である．すなわち，G は連結 (connected) であり、かつ、閉路 (loop) をもたない．

(b) G は２連結グラフである．すなわち，互いに異なるすべての頂点 i, j, a に対して，a を通らないような i から j への経路 (path) がある．

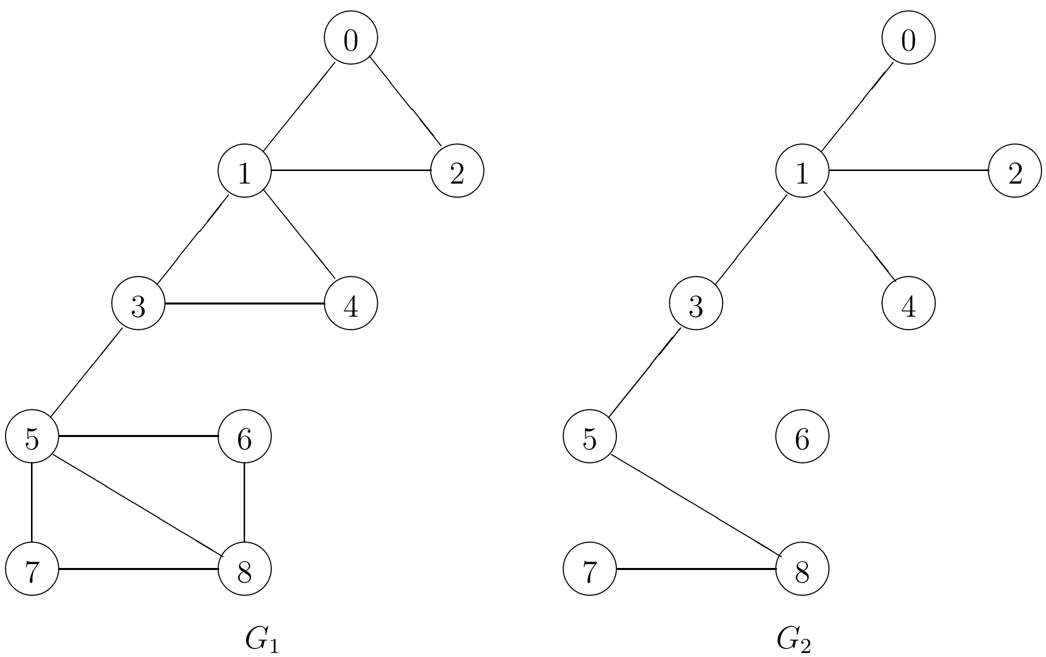

図１無向グラフ G_1, G_2

問題　8　（確率論）

　X, Y を独立でそれぞれパラメータ λ, μ $(\lambda, \mu > 0)$, のポアソン分布に従う確率変数とする：

$$P(X = r) = e^{-\lambda}\ \frac{\lambda^r}{r!}, \qquad P(Y = r) = e^{-\mu}\ \frac{\mu^r}{r!}, \qquad r = 0, 1, 2, \ldots$$

(1) X の平均を求めよ．
(2) $X + Y$ はどのような確率分布に従うか．
(3) k, n を $k \leq n$ である自然数とするとき，条件 $X + Y = n$ のもとでの $X = k$ の条件付き確率を求めよ．また，この条件付き確率分布はどのような確率分布か．

問題　9　（微分方程式）

　a, b を正定数として，$x(t)$ に関する微分方程式の初期値問題

$$\frac{dx}{dt} = bx^2 - ax \quad (t > 0), \qquad x(0) = x_0 \quad (x_0 > 0)$$

を考える．
(1) 解 $x(t)$ を求めよ．
(2) x_0, a, b の関係で分類し，$t \to \infty$ のときの解の振る舞いを調べ，その様子を図示せよ．

問題　10　（情報システム）

　次の問いについて答えよ．
(1) ヒューマン・インタフェースのモデルである，Norman による行為の７段階モデルと，Rasmussen による行為の３階層 (SRK) モデルを，それぞれモデルの概要がわかるように図示し，説明せよ．
(2) ERP（Enterprize Resource Planning），SCM（Supply Chain Management），CRM（Customer Relationship Management）の３つの情報システムについて，それぞれのシステムの目的，特徴，期待される効果がわかるように説明せよ．

問題　11　（アルゴリズム設計法）

次の **I,II** のうち，いずれか１つを選択して 答えよ.

I. 以下の各問に答えよ。

1. x と整数 $n(\geq 1)$ が入力のとき、x^n を $O(\log n)$ 回の乗算で求める再帰的アルゴリズムを書け。
2. n+1 個の整数 $a_1, a_2, \cdots, a_n, b$ が与えられたとき、$a_i (1 \leq i \leq n)$ の中から適当に何個かを選んで、それらの総和がちょうど b になるようにできるか否かを判定する時間計算量が $O(nb)$ のアルゴリズムを書け。
（**ヒント:** $f(i,j)$ を次のような関数とする。$a_1, a_2, \cdots, a_i$ の中から適当に何個かを選んで、それらの総和がちょうど j になるようにできるとき $f(i,j) = 1$、そうでないとき $f(i,j) = 0$ である。すると、問題は $f(n,b)$ を求めることに帰着する。動的計画法を用いよ。)

II. 連結無向グラフ $G = (V, E)$ の各辺 $e \in E$ にコスト w_e が付けられているとする。G のすべての頂点を含む部分グラフで木になっているものを、G の**スパンニング木**と呼ぶ。いま G の部分グラフ H のコストを、H に含まれる辺の重みの最小値 $\min\{w_e \mid e \in H\}$ とする。

1. コスト最小のスパンニング木を計算する、なるべく簡単なアルゴリズムを与えよ。（注：プログラムではなく、読んで解りやすいアルゴリズムを記述すること）
2. コスト最大のスパンニング木を計算する、なるべく効率のよいアルゴリズムを与えよ。（(1) の注に同じ）
3. (2) のアルゴリズムの正当性を証明し、その計算量を解析せよ。

問題　12　（プログラミング）

次の I,II のうち，いずれか1つを選択して答えよ．

I. 以下に示すプログラムは，素数（prime number）を小さい順に求める C 言語によるプログラムである．このプログラムに関する以下の問いに答えよ．なお，プログラムの左側の数字は，行の番号を示すもので，プログラムの一部ではない．また，プログラム中の `%` は，剰余演算（remainder operation）を行う演算子である．

```
 1:    #include <stdio.h>
 2:
 3:    #define M 5
 4:
 5:    int n;
 6:    int table[M];
 7:
 8:    int check(int k)
 9:    {
10:        int j;
11:
12:        j = 0;
13:        while (j < n) {
14:            if (k % table[j] == 0) {
15:                return 0;
16:            }
17:            j = j + 1;
18:        }
19:        return 1;
20:    }
21:
22:    main()
23:    {
24:        int i;
25:
26:        n = 0;
27:        i = 2;
28:        while (n < M) {
29:            if (check(i) != 0) {
30:                printf("%d\n", i);
31:                table[n] = i;
32:                n = n + 1;
33:            }
34:            i = i + 1;
35:        }
36:    }
```

(1) このプログラムで，変数 `n` と配列 `table` は何を保持するためのものであるか説明せよ．

(2) このプログラムを実行する場合を考える．

(ア) このプログラムが出力する文字列を答えよ．

(イ) 14 行めの剰余演算が実行される回数は何回か．

(ウ) 14 行めの if 文を最後に実行する時の `j`，`k`，`n` の値はそれぞれいくらか．

(3) ある数が素数であるかを調べるためには，その数の平方根（square root）以

下の数で割り切れないことを確認すればよいが，このプログラムはこの性質を活用していない．

(ア) この性質を活用して実行効率を改善したプログラムを示せ．ただし，平方根を求める関数を用いてはならず，乗算（multiplication operation）の実行回数ができる限り少なくなるようにすること．プログラムの修正箇所が少ない場合には，元のプログラムとの差分のみを示してもよい．

(イ) 改良後のプログラムを実行した場合に，剰余演算と乗算が実行される回数はそれぞれ何回か．

II. タイプAとタイプBのC言語プログラムは，同じ計算を実行するものであるが，一方は誤差が生じやすい．誤差が生じやすいタイプを示し，その理由を記せ．

- タイプA

```
#include <stdio.h>
int main()
{
    int i;
    float sum=0.0;
    for (i=1; i<=1000; i++)
        sum=sum+i/10.0;
    printf("%f \n",sum);
    return 0;
}
```

- タイプB

```
#include <stdio.h>
int main()
{
    float x, sum=0.0;
    for (x=0.1; x<=100.0; x+=0.1)
        sum=sum+x;
    printf("%f \n",sum);
    return 0;
}
```