数 [1] $X = \begin{pmatrix} -26 & 10 \\ -105 & 39 \end{pmatrix}$ とする.

(1) X を対角化せよ.

(2) $X = Y^2$ となる実行列 Y を一つ求めよ.

数 [2] 次の問いに答えよ.

(1) 広義積分 $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ は収束することを示せ.

(2) 広義積分 $\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x} dx$ は発散することを示せ.

数 [3] $Q = (Q(a_1), ..., Q(a_m))$ を $A = \{a_1, ..., a_m\}$ 上の確率分布とし, $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ は互いに独立で $\Pr(X_n = a_i) = Q(a_i)$ $(i = 1, ..., m,\ n = 1, 2, ...)$ なる確率変数列とする. 長さ n の系列 $\mathbf{x} \equiv (x_1, ..., x_n) \in A^n$ における a_i の出現個数を $N(a_i|\mathbf{x})$ と記す. 集合 $T_{n,\varepsilon}$ $(\varepsilon > 0)$ を

$$T_{n,\varepsilon} = \left\{ \mathbf{x} \in A^n ; \left| \frac{N(a_i|\mathbf{x})}{n} - Q(a_i) \right| \le \frac{\varepsilon Q(a_i)}{\log m},\ i = 1, ..., m \right\}$$

と定める. このとき, 以下のことを示せ.

(1) 任意の $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n) \in T_{n,\varepsilon}$ に対し,

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \log Q(x_k) - \sum_{i=1}^{m} Q(a_i) \log Q(a_i) \right| \le \varepsilon.$$

(2) $\lim_{n\to\infty} \Pr\{(X_1, ..., X_n) \in T_{n,\varepsilon}\} = 1.$

数 [4] p を奇素数とする. p と互いに素な整数 a に対して $x^2 \equiv a \mod p$ が解をもてば, 任意の自然数 n に対して $x^2 \equiv a \mod p^n$ は 2 個の解を持つことを証明せよ.

数 [5] 非斉次 2 階線型常微分方程式

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = \phi(x)$$

を考える.

(1) 対応する斉次方程式の線型独立な二つの解 $y_1(x), y_2(x)$ が既知であるとき, $u(x), v(x)$ を

$$u'y_1 + v'y_2 = 0, \qquad u'y_1' + v'y_2' = \phi(x)$$

を満たすように選べば, $y(x) = u(x)y_1(x) + v(x)y_2(x)$ は非斉次方程式の一つの解（特解）であることを示せ.

(2) x および $1/x$ は

$$y'' + \frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2} = 0 \quad (x > 0)$$

の解であることを用いて

$$y'' + \frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2} = \log x \quad (x > 0)$$

の一般解を求めよ.

(3) 上の (2) において, 非斉次方程式の解で $y(1) = 1, y'(1) = 0$ を満たすものを求めよ.

数 [6] $\mathbb{N}$ を自然数全体の集合, $A = \{f \mid f$ は $\mathbb{N}$ から $\mathbb{N}$ への写像$\}$, $B = \{f \mid f$ は $\mathbb{N}$ から A への写像$\}$ とする.

(1) $|A| = |B|$ (A と B は同じ濃度をもつ) であることを証明せよ.

(2) $A = \bigcup_{n\in} C_n$ とすると, $|C_m| = |A|$ となっている $m \in \mathbb{N}$ が存在していることを示せ.

数 [7] 階層別分析法における次の問いに答えよ.

(1) 一対比較の利点と欠点について述べなさい.

(2) 整合度 (Consistency Index) の意味について説明しなさい.

(3) どのような場合に幾何平均を利用するのか, 算術平均ではなく幾何平均にする理由を記しなさい.

(4) グループによる意思決定への適用方法を具体的に述べなさい.

(5) 階層分析法がどんなばあいに適用できるのか, その簡単な例を挙げ, 階層構造 (階層図) で表しなさい.