数 [1]$-1 < x < 1$ のすべての x において, $|\sqrt{1+x} - f(x)| < \frac{1}{10}$ を満たす多項式 $f(x)$ をひとつ求めよ.

数 [2] 実数を成分にもつ 2 行 2 列の行列 $A(\neq E)$, および整数を成分にもつ 2 行 2 列の行列 B について, 以下の問いに答えよ. ただし, E は単位行列, ${}^{t}A$ は A の転置行列, $\det B$ は B の行列式をあらわすものとする.

(1) $A^3 = A^tA = E$ をみたす A をすべて求めよ.

(2) $A^3 = AA^t = E$, $AB = BA^2$, $\det B = -1$ をみたす (A, B) をすべて求めよ.

数 [3] 常微分方程式の初期値問題

$$\frac{dx}{dt} = 2x - x2, \quad x(0) = C \quad (C \text{ は正定数})$$

の解を $x(t)$ $(t > 0)$ とする.

(1) $x(t) > 0$ はわかっているものとして, $y(t) = 1/x(t)$ の満たす微分方程式を求めよ.

(2) $y(t)$ に対する初期値問題の解を求めることによって, $x(t)$ を求めよ.

(3) 上の結果および $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$ の様子を調べ, 次の各場合に解 $x(t)$ のグラフの概形を描け.

(i) $C > 2$,　　(ii) $1 < C < 2$,　　(iii) $0 < C < 1$.

数 [4]m および n を自然数とし $f(x)$ を整数係数の x に関する m 次多項式とする. さらに, 最高次の係数は n で割れないものとする. 以下に答えよ.

(1) $f(x) \equiv 0 \mod n$ を満たす整数解が法 n の下で m より多くなるような例を一つ挙げよ.

(2) n が素数の場合には上のような例は存在しないことを証明せよ.

数 [5] $f(m,n) = (2^n$ を m で割った余り$)$ とすると, $f(m,n)$ は多項式時間計算可能であることを示せ.

数 [6] $X_1, X_2, ...$ は互いに独立で $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}$ なる確率変数列とし,

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n, \qquad U_n = \max(S_1, S_2, ..., S_n)$$

とする. 与えられた自然数 K に対し, $S_k = K$ となる最小の k を T とする. このとき以下の問いに答えよ.

(1) 確率 $P(S_n = K)$ を求めよ.

(2) 不等式

$$P(T = k) \le 2P(T = k,\, S_n \ge K) \qquad (k \le n)$$

および

$$P(U_n \ge K) \le 2P(S_n \ge K)$$

を示せ.

数 [7] 階層分析法によって 4 つの評価項目に対して一対比較を行って得られた行列 $\mathbb{A}$ は以下である.

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & \star & 1 & \star \\ \star & 1 & \star & \frac{1}{3} \\ 1 & \star & 1 & \frac{1}{5} \\ \star & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

ここで, $\star$ は評価できなかったことを示す.

この不完全な一対比較行列に対して推定したい評価間の重みを求める方法を示せ.